Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane

Dall'aritmetica all'*algebra informale*

Alessandro Ramploud

Advances in Mathematics Education

Jinfa Cai
Eric Knuth *Editors*

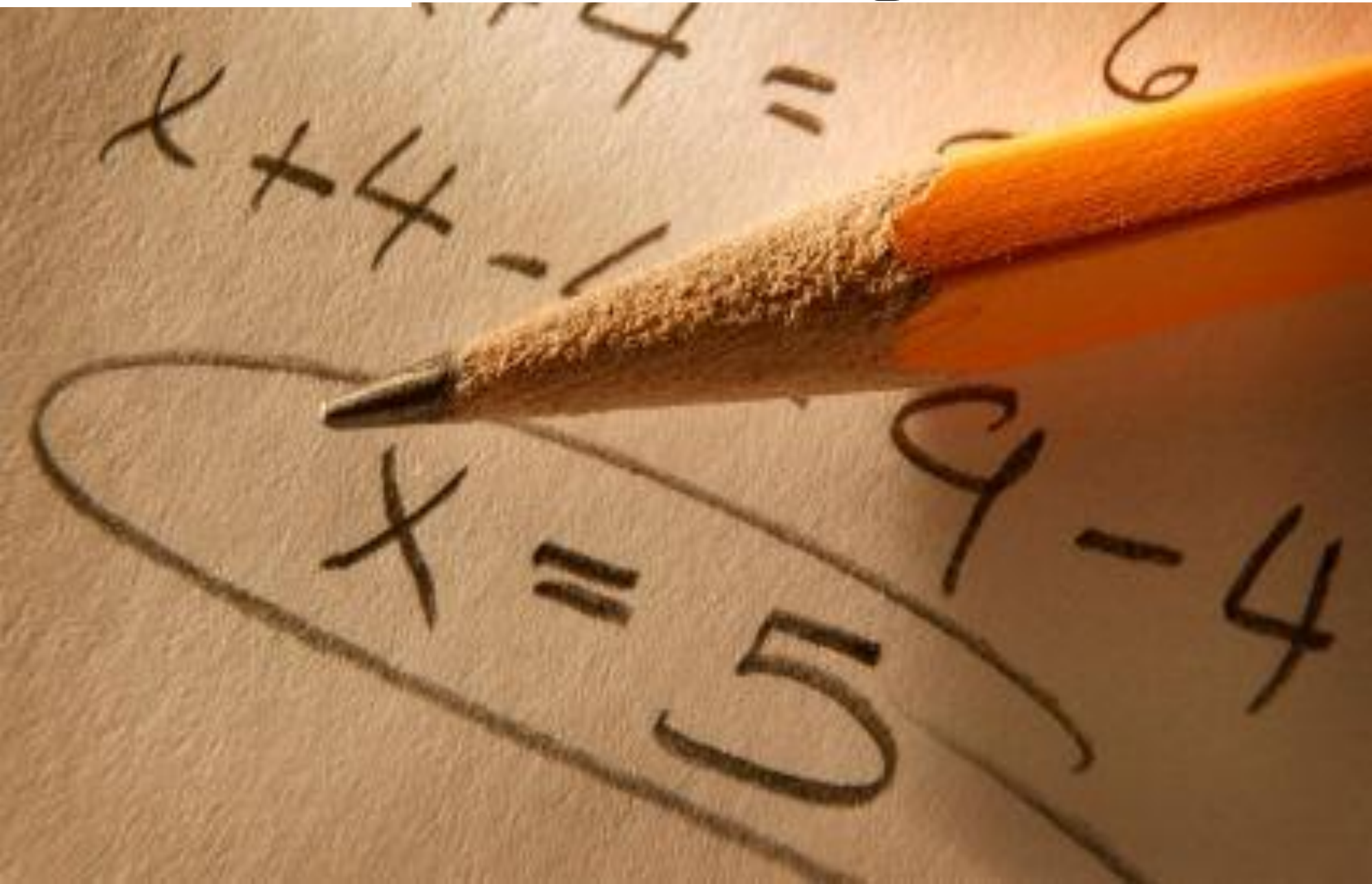
Early Algebraization

A Global Dialogue from Multiple Perspectives

Springer

perché....

...l'algebra?



L’algebra nella scuola

Tradizionalmente,

la maggior parte dei programmi scolastici di matematica separano lo studio dell'aritmetica e lo studio dell'algebra.

l’**aritmetica** diviene l'obiettivo principale della matematica per la **scuola primaria,**

l’**algebra** diviene l'obiettivo principale della matematica per la **scuola secondaria**

La domanda:

Se consideriamo corretto e da perseguire ciò che ci dicono J. Cai e E. Knuth, ossia, che...

...Lo sviluppo di idee algebriche nei gradi scolastici inferiori (primaria) richiede fondamentalmente la *riforma di come dovrebbero essere intese ed insegnate l'aritmetica e l'algebra, nonché una migliore comprensione dei vari fattori che rendono il passaggio dall'aritmetica all'algebra difficile per gli studenti .*

E' possibile, nel nostro contesto culturale, tentare di realizzare ciò?

trasposizione culturale,
intendendo con questo termine il processo di cambiamento che si sviluppa quando vi è un farsi incontro di pratiche didattiche di differenti culture, che consentono il ripensamento delle proprie

B. Di Paola, F. Martignone, M. Mellone, A. Ramploud

Istituto Comprensivo “Don Pasquino Borghi”
Reggio Emilia

Scuola Primaria “San Bartolomeo”
Classe V (matematica 6 h a settimana)

ins. Roberta Munarini

“Problemi con Variazione e Rappresentazioni Grafiche”

Durata: 4 mesi

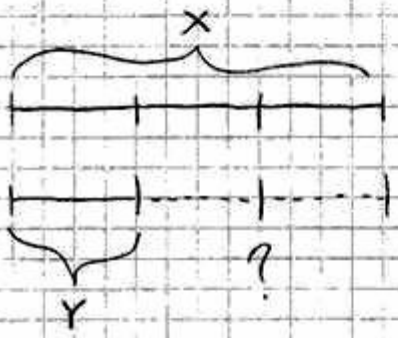
Sommario del percorso

- **Progettazione e scelta della proposta didattica.**
- **Analisi della situazione iniziale (prova d'ingresso).**
- **Analisi dei risultati.**
- **Ridefinizione del percorso didattico.**
- **Attività di esplorazione iniziale (discussione matematica).**
- **Rilancio delle attività (partendo dai contributi dei bambini) sulla rappresentazione “cinese”.**
- **Risoluzione (con rappresentazione grafica) di problemi additivi/sottrattivi a piccolo/grande gruppo.**
- **Risoluzione individuale(con rappresentazione grafica) di problemi additivi/sottrattivi.**
- **Risoluzione (con rappresentazione grafica) di problemi moltiplicativi a piccolo/grande gruppo – frazioni e percentuali-**
- **Risoluzione individuale(con rappresentazione grafica) di problemi moltiplicativi.**
- **Creazione di una tripletta di problemi partendo da una rappresentazione grafica (proposta sia additiva che moltiplicativa) a piccolo gruppo.**
- **Prova finale.**

Classe V

17 GENNAIO 2013

Dopo aver ripercorso i ragionamenti sui problemi e le loro rappresentazioni, prova ad inventare uno che corrisponda a questo:



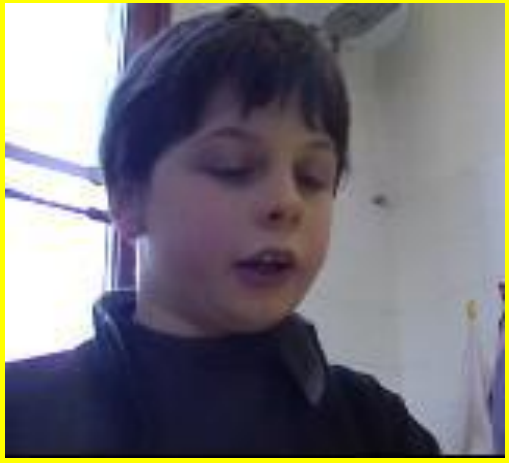
Un pescheggio pesca un X. di pesce e lo divide in 3 par in cui una è un Y di pesce. Quanto pesce in due parti?

Y . 2 = Z

Azioni/Esempi

Attività didattiche
Durata: 2 ore a settimana
settembre-marzo

Esempio: La rappresentazione segmentale, *trasposizioni* dai nostri problemi a parole ai problemi con variazione

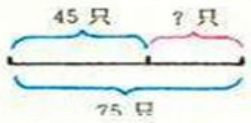


Scuola Primaria “S. Bartolomeo”
Reggio Emilia

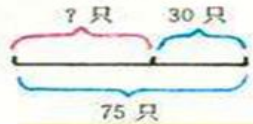
例 11 先解答，再说一说横着、竖着每组三道题有什么联系？

1. (1)河里有 45 只白鸭，30 只黑鸭，一共有多少只鸭？

(2)河里有白鸭和黑鸭一共 75 只，其中 45 只是白鸭，有多少只黑鸭？

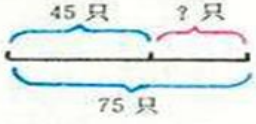


(3)河里有白鸭和黑鸭一共 75 只，有 30 只黑鸭，有多少只白鸭？

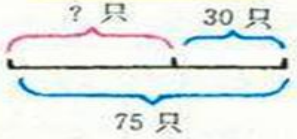


2. (1)河里有一群鸭，游走 30 只，还剩 45 只。这群鸭有多少只？

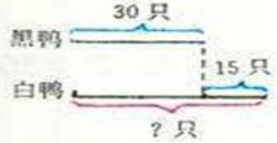
(2)河里有 75 只鸭，游走一些，还剩 45 只，游走多少只？



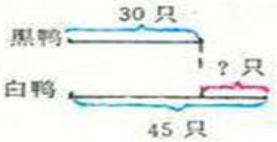
(3)河里有 75 只鸭，游走 30 只，还剩多少只？



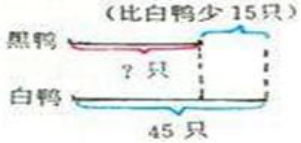
3. (1)河里有 30 只黑鸭，白鸭比黑鸭多 15 只（黑鸭比白鸭少 15 只），白鸭有多少只？



(2)河里有 30 只黑鸭，45 只白鸭，白鸭比黑鸭多几只？（黑鸭比白鸭少几只）

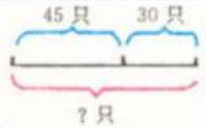


(3)河里有 45 只白鸭，黑鸭比白鸭少 15 只（白鸭比黑鸭多 15 只），黑鸭有多少只？

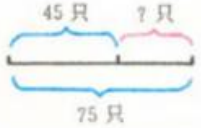


Traduzione del testo cinese

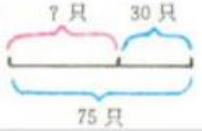
(1) **Nello stagno abbiamo** 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?



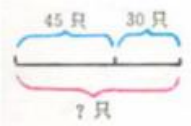
(2) **Nello stagno abbiamo** anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?



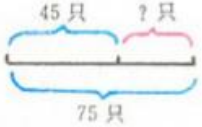
(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?



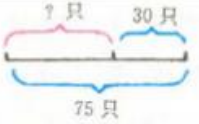
(1) **Nello stagno abbiamo** un gruppo di anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano 45. Questo gruppo di anatre ne ha quante?



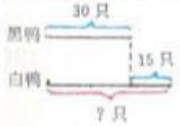
(2) **Nello stagno abbiamo** 75 anatre, nuotano via alcune, ancora ne restano 45, sono nuotate via quante?



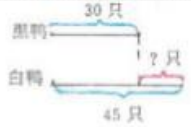
(3) **Nello stagno abbiamo** 75 anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano quante?



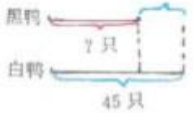
(1) **Nello stagno abbiamo** 30 anatre nere, anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità (anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità), anatre bianche quante ne abbiamo?



(2) **Nello stagno abbiamo** 30 anatre nere, 45 anatre bianche, anatre bianche rispetto anatre nere di quante unità maggiore? (anatre nere rispetto anatre bianche di quante unità minore?)

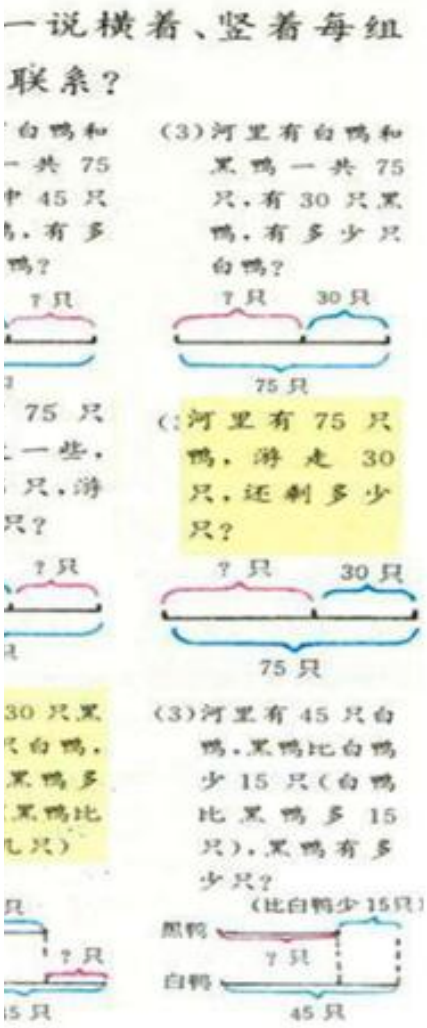


(3) **Nello stagno abbiamo** 45 anatre bianche, anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità (anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità), anatre nere quante ne abbiamo?



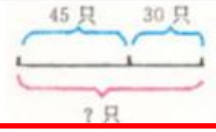
NB E' stata realizzata una traduzione "letterale" per sottolineare la regolarità della lingua cinese.

Per approfondimenti vedi:

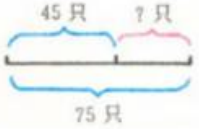


Traduzione del testo cinese

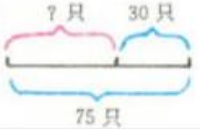
(1) **Nello stagno abbiamo** 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?



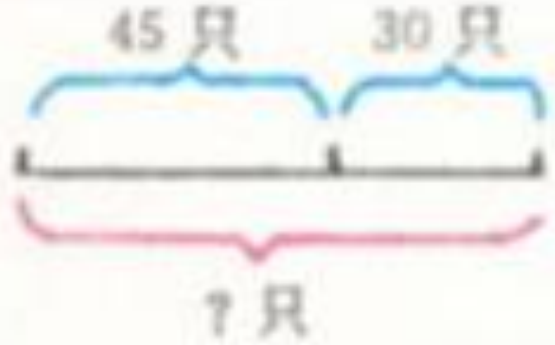
(2) **Nello stagno abbiamo** anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?



(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?

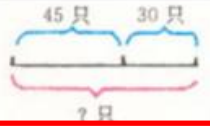


(1) **Nello stagno abbiamo** 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?



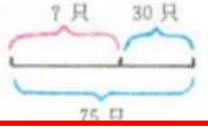
Traduzione del testo cinese

(1) **Nello stagno abbiamo** 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?



(2) **Nello stagno abbiamo** anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?

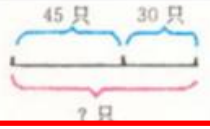
(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?



(2) **Nello stagno abbiamo** anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?

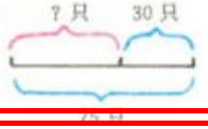
Traduzione del testo cinese

(1) **Nello stagno abbiamo** 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?

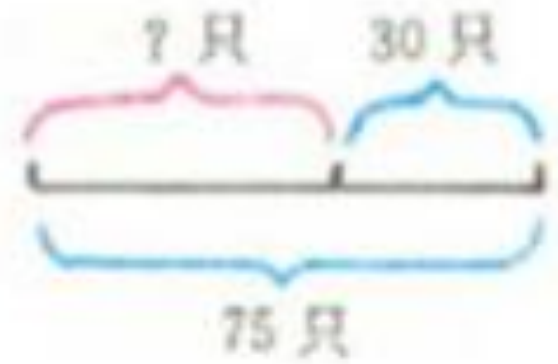


(2) **Nello stagno abbiamo** anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?

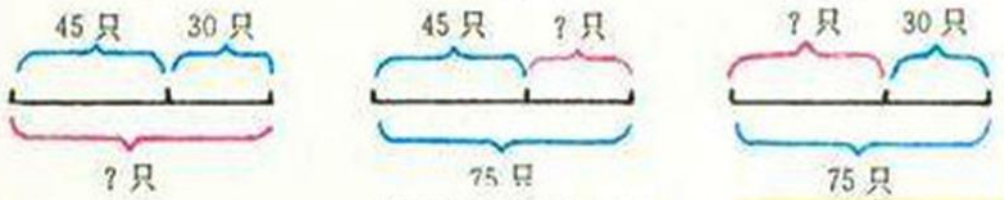
(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?



(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?



Dalla scuola estiva

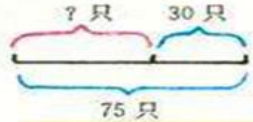


例 11 先解答，再说一说横着、竖着每组三道题有什么联系？

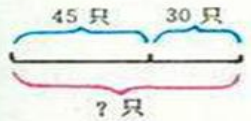
1. (1)河里有 45 只白鸭，30 只黑鸭，一共有多少只鸭？

(2)河里有白鸭和黑鸭一共 75 只，其中 45 只是白鸭，有多少只黑鸭？

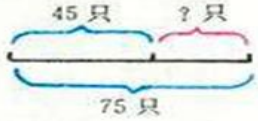
(3)河里有白鸭和黑鸭一共 75 只，有 30 只黑鸭，有多少只白鸭？



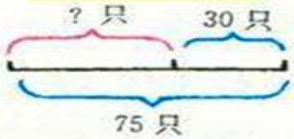
2. (1)河里有一群鸭，游走 30 只，还剩 45 只。这群鸭有多少只？



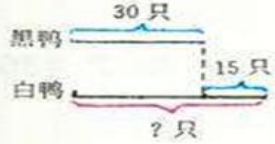
(2)河里有 75 只鸭，游走一些，还剩 45 只，游走多少只？



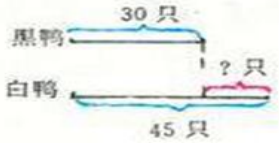
(3)河里有 75 只鸭，游走 30 只，还剩多少只？



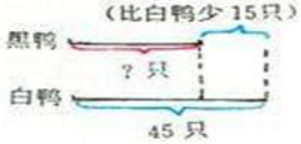
3. (1)河里有 30 只黑鸭，白鸭比黑鸭多 15 只（黑鸭比白鸭少 15 只），白鸭有多少只？



(2)河里有 30 只黑鸭，45 只白鸭，白鸭比黑鸭多几只？（黑鸭比白鸭少几只）



(3)河里有 45 只白鸭，黑鸭比白鸭少 15 只（白鸭比黑鸭多 15 只），黑鸭有多少只？



Proposta didattica

problema n°173

LA DIFFERENZA DI DENARO

Luca e sua sorella ricevono 55,50 euro per il loro compleanno.
La sorella Patrizia riceve più soldi di Luca.
Se la differenza tra le due somme è di 12,50 euro, quanti euro ha ricevuto Patrizia? E Luca?

Risultati prova del 29/11/2012:

su 17 bambini **16 non sono stati in grado di elaborare una soluzione al problema**;

1 riesce a trovare una strategia aritmetica di risoluzione.

Rappresentazione grafica

Quadro della mediazione semiotica: discussione matematica

- *Che cos'è?*
- *Uno schema...*
- *Un grafico...*
- *Una tabella...*

- *Com'è fatta?*
- *Ha delle frecce...*
- *E' come una mappa...*

- *Come funziona?*
- *Organizza, ordina le informazioni che devono stare tutte insieme...*
- *Evidenzia idee e parole importanti...*

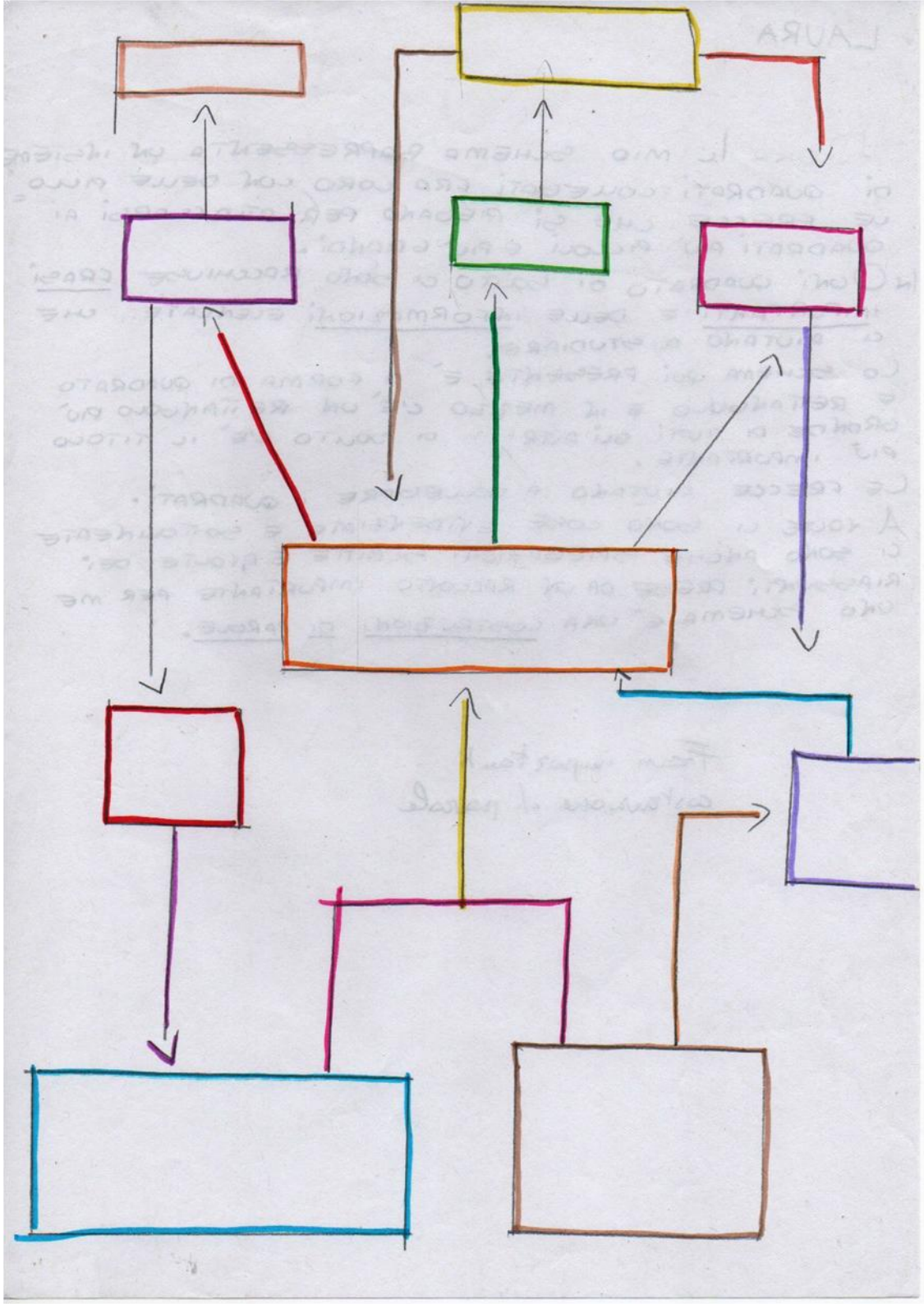
- *A cosa serve?*
- *A semplificare...*
- *A capire...*
- *A far venire idee...*

	MATEMATICA	SCIENZE
COME È LA MATERIA?		
QUALE È LA TUA MATERIA PREFERITA? PERCHÉ?		
QUESTA MATER..		

QUESTO SCHEMA SERVE SPESSO PER METTERE A CONFRONTO COSE, MATERIE, CITTÀ, ANIMALI E PERSONE.

ALE. F.

Metter a confronto



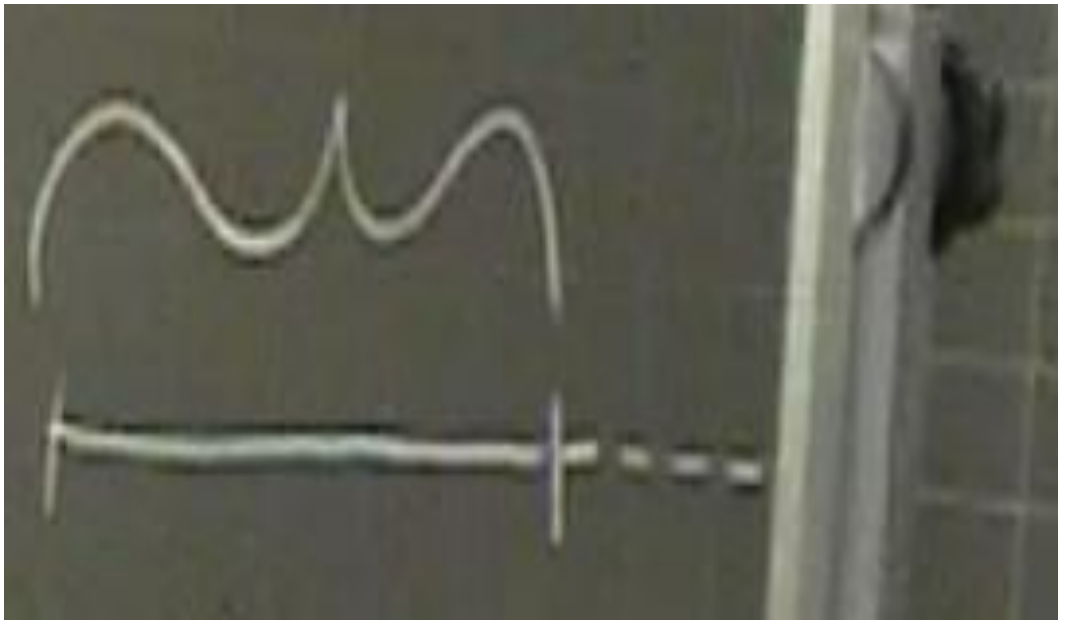
Rappresentazione segmentale

“Come i problemi cinesi, quando abbiamo fatto lo schema per capire più cose”

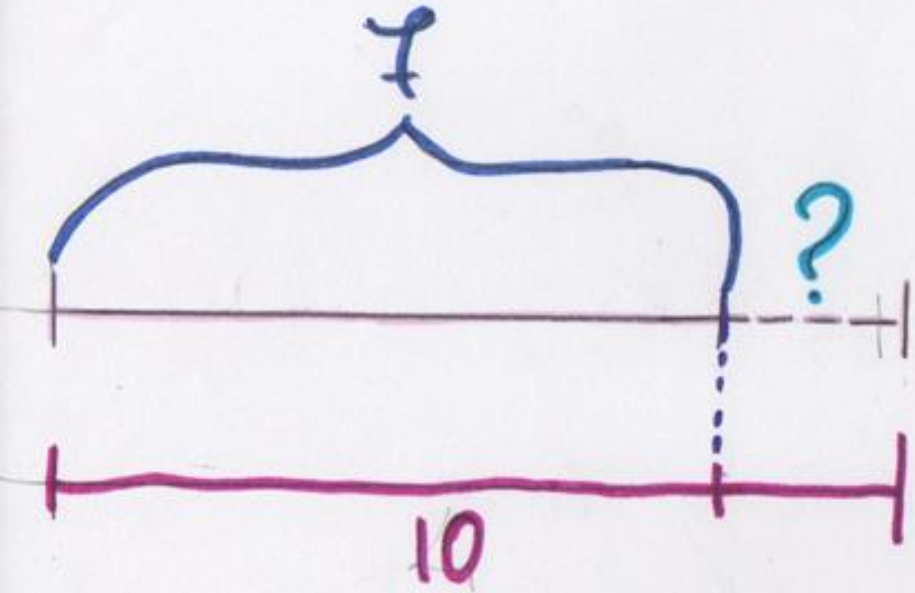
Lucia

Esplorazione delle rappresentazioni

- Che cos'è?
- Com'è fatta?
- Come funziona?
- A cosa serve?



Laty P.



CHE COSA É?

É UNO SCHEMA CHE RAPPRESENTA UN'UNITÁ COME IO É CHE SERVE PER ORIENTARSI A SCOPRIRE CHE UNITÁ MANCA.

COME FUNZIONA?

PER PRIMO IL PUNTO DI DOMANDA. ?
IL PUNTO DI DOMANDA SERVE PER CAPIRE COSA DEVO TROVARE, CIOÉ L'UNITÁ CHE MANCA PER ARRIVARE A 10. IL 7 CI FA CAPIRE L'UNITÁ CHE DOBBIAMO TROVARE E RAPPRESENTA L'UNITÁ CHE ABBIAMO, IL 10 É TUTTO IL TOTALE

COME É FATTO?

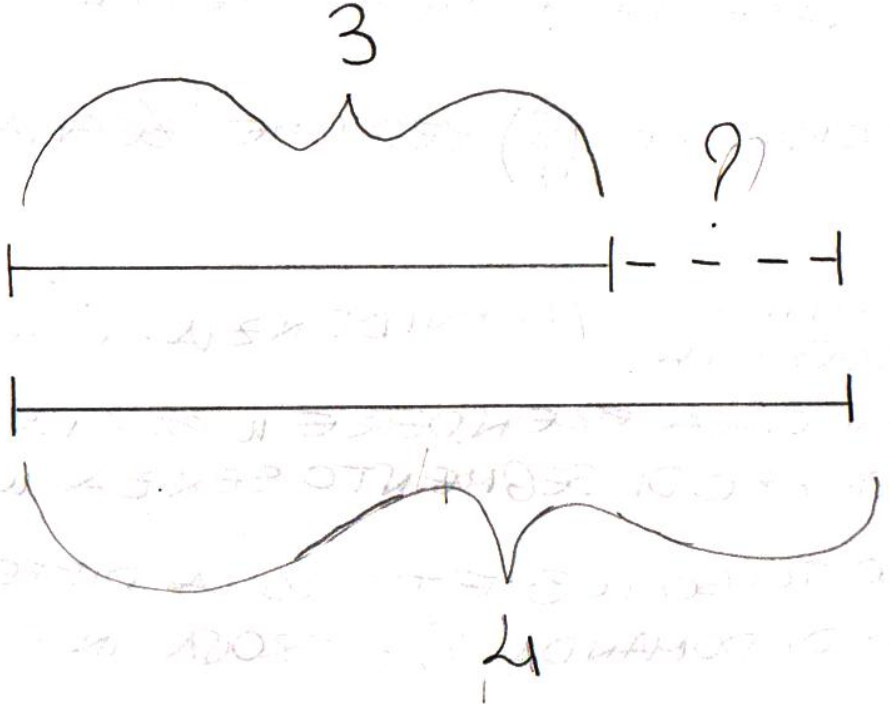
HA 2 LINEE, UNA SOPRA E UNA SOTTO, QUELLA SOPRA INDICA IL 7 E IL ? CHE SERVONO PER TROVARE IL 10.
POI C'É LA LINEA SOTTO CHE RAPPRESENTA IL TOTALE, 10.

A COSA SERVE?

SERVE PER ORIENTARSI A TROVARE L'UNITÁ CHE MANCA IN MODO PIÚ SEMPLICE E PIÚ CAPIBILE

WCIA

- CHE COS'È?
- COME È FATTO?
- A COSA SERVE?
- COME FUNZIONA?
- COSA POTREBBE SERVIRE?



♡ È L'IMMAGINE CHE ~~RAPPRESENTA~~ / CHE SEMPLIFICA / ~~IL TESTO~~ CHE EVIDENZIA LE COSE PIÙ IMPORTANTI DEL TESTO / ~~DEL~~ PROBLEMA

☆

- PERCHÉ È PIÙ LUNGO?
- PERCHÉ È TRATTEGGIATO?
- PERCHÉ C'È LA PARENTESI GRAFFA?
- PERCHÉ C'È IL PUNTO DI DOMANDA?

È TRATTEGGIATO PERCHÉ COSÍ SI CAPISCE QUALE È LA DIFFERENZA

IL SEGMENTO SOTTO È PIÚ LUNGO PERCHÉ È TUTTO L'INSIEME.
C'È LA PARENTESI GRAFFA PERCHÉ SEGNA LA PARTE CHE STO INDICANDO (SOPRA), SOTTO INVECE LA HO MESSA PERCHÉ NN C'È LA DIFFERENZA.
C'È IL PUNTO DI DOMANDA (?) PERCHÉ SEGNA COSA BISOGNA TROVARE.

* SERVE A SEMPLIFICARE / A EVIDENZIARE IL RAGIONAMENTO X RISOLVERE IL PROBLEMA.

PRIMA DI TUTTO BISOGNA PRENDERE IL SEGMENTO PIÚ LUNGO (IN QUESTO CASO IL 4) E POI TOGLIERCI IL PEZZO DI SEGMENTO SENZA IL PUNTO DI DOMANDA (?) IN QUESTO CASO TOLGO IL 3 E TROVO LA DIFFERENZA, E LO STESSO X QUANDO IL PUNTO DI DOMANDA (?) SI TROVA IN PUNTI DIVERSI.

“ti dà un'indicazione in più rispetto al testo”
“è una parte del disegno che rappresenti...
..per rappresentare il problema”,
Laura
“ti aiuta a ragionare”,
“questo è disegnato e il testo è pieno di parole”.
“tra tutte queste parole ci sono delle parole che ti possono ingannare o fregare”,
Alessandro

La rappresentazione con i segmenti diviene
“un meccanismo da usare in certi tipi di problemi”

Gaetano

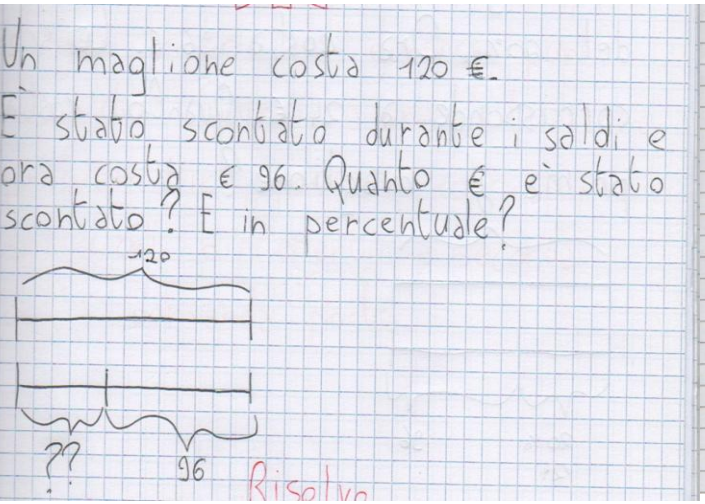
“A seconda di dove si trova il punto di domanda, cambia il problema”

Francesco

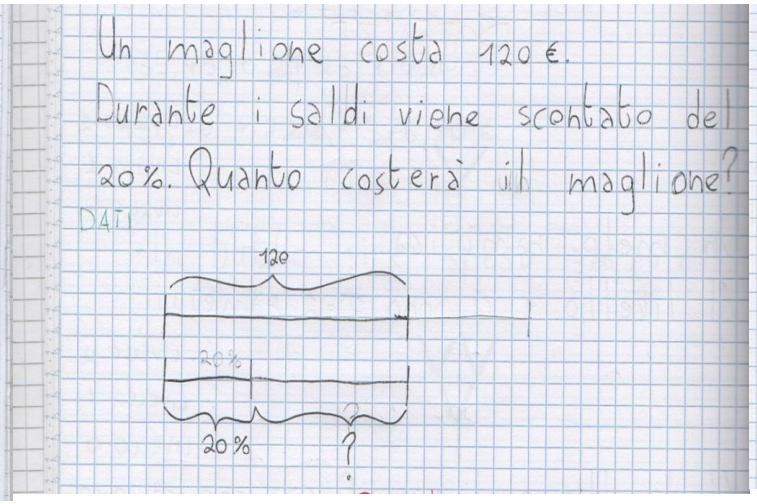
Formalizzazione

Ogni problema che incontro può essere visto da diversi punti di vista. Quindi a una situazione problematica, possono corrispondere soluzioni differenti a seconda della domanda posta.

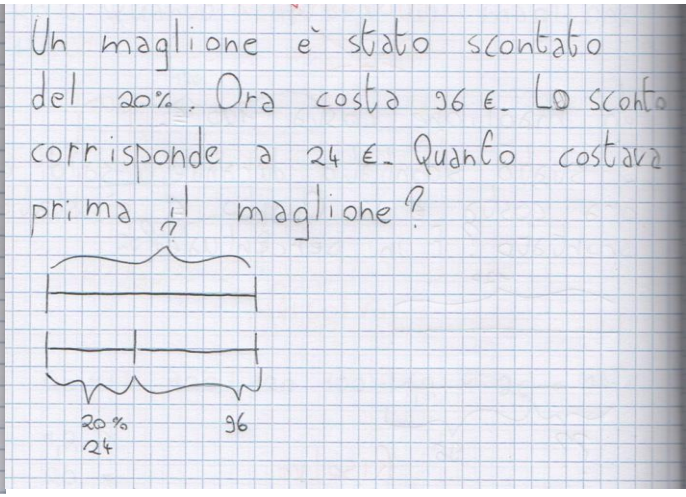
Proposte didattiche con variazione



Un maglione costa 120 euro. E' stato scontato durante i saldi e ora costa €96. Quanto è stato scontato? E in percentuale?



Un maglione costa 120 euro. Durante i saldi viene scontato del 20%. Quanto costerà il maglione?



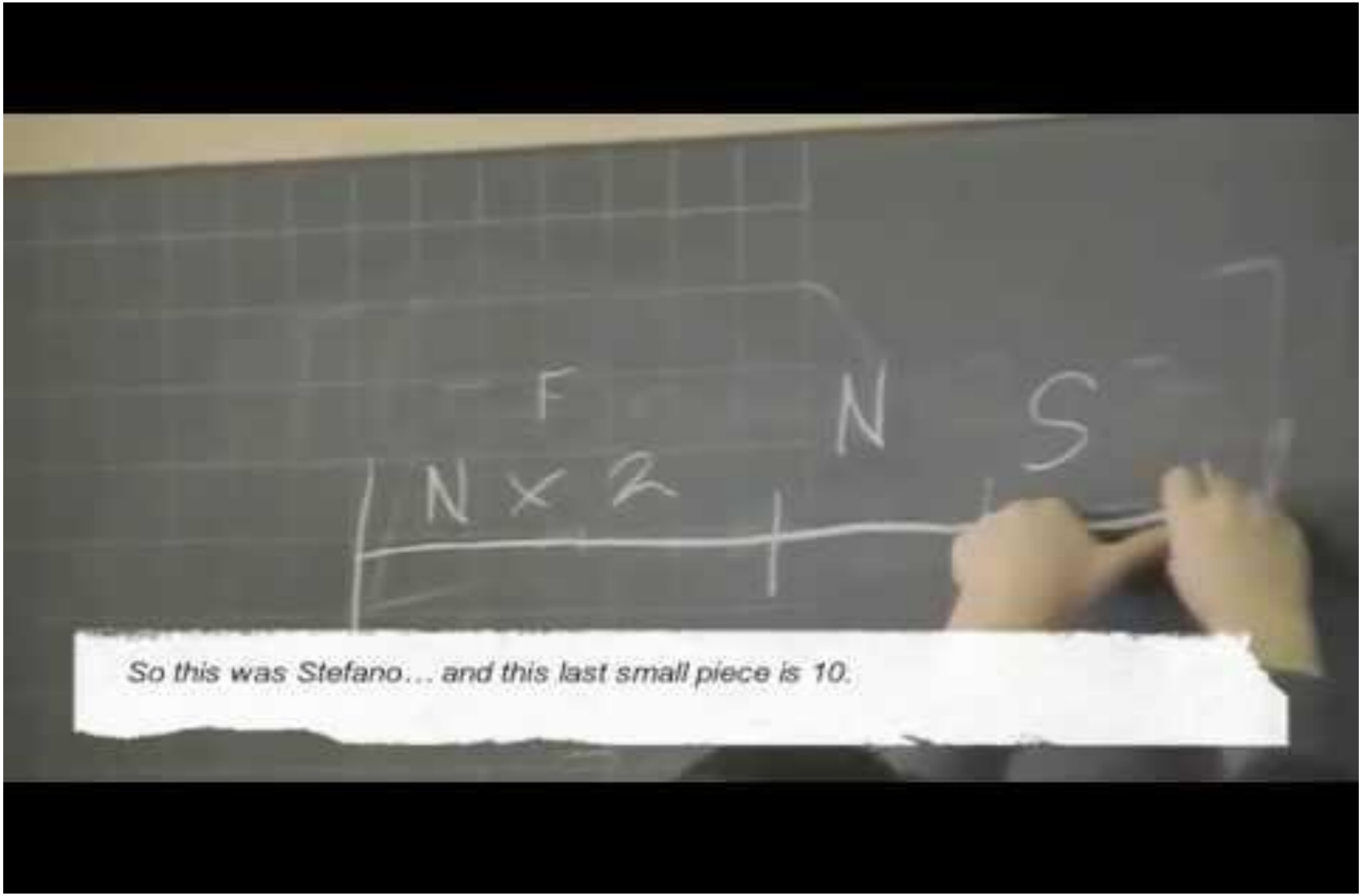
Un maglione è stato scontato del 20%. Ora costa 96€. Lo sconto corrisponde a 24€. Quanto costava prima il maglione?

Prove di verifica intermedie

28/2/2013 (esercizio svolto prima in gruppo, poi corretto insieme e rendicontato dai vari gruppi nelle loro modalità di risoluzione)

La nonna regala 618 euro ai suoi nipoti Franca, Nicola e Stefano. Franca riceverà il doppio di Nicola e Stefano 10 euro in più di Nicola. Quanti euro riceverà ogni nipote?

Figural equation: an experience of cultural transposition



ICMI Study 23 *June 3-7, 2015, Macau*

Verifica finale

21/3/2013

La mamma ha comprato 2 maglie spendendo 118 euro. Se la più cara costa 28 euro più dell'altra, quanto costa ogni maglia?

21/3/2013

Marco ha comprato 2 trottole spendendo 10 euro. Se la prima costa ¼ della seconda, quanto costa ognuna?

Risultati:
confronto tra inizio e fine dell'attività

29/11/2012

Problema iniziale risolto correttamente solo da 1 bambino su 17 ed in modo aritmetico.

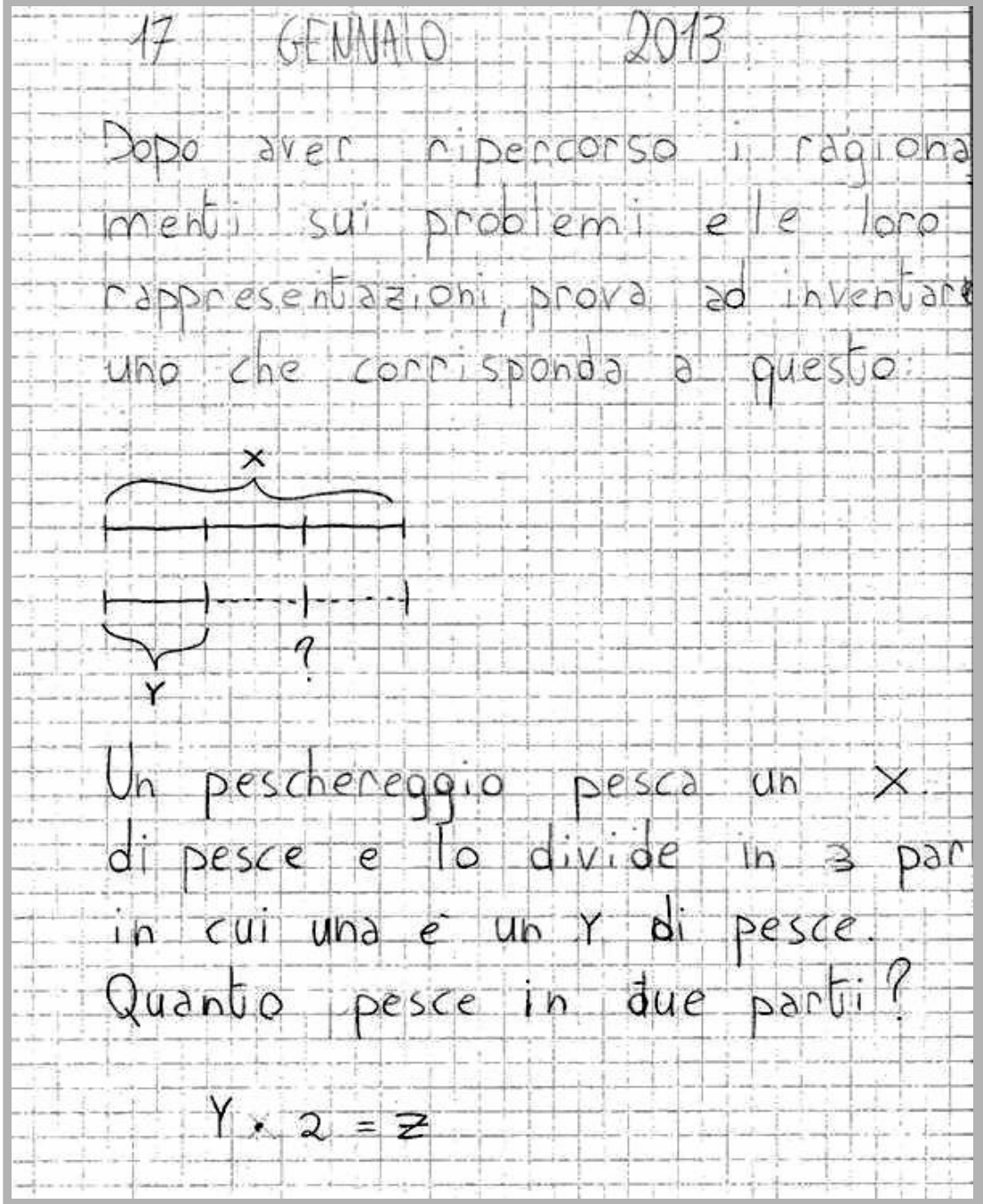
21/3/2013

I problema: risolto correttamente da 12 su 17 con l'uso delle rappresentazioni grafico segmentali.

Classe V

Insegnante specialista

Ambito logico-matematico su 3 classi



Azioni/Esempi

Attività didattiche

Durata: 2 ore a settimana
settembre-marzo

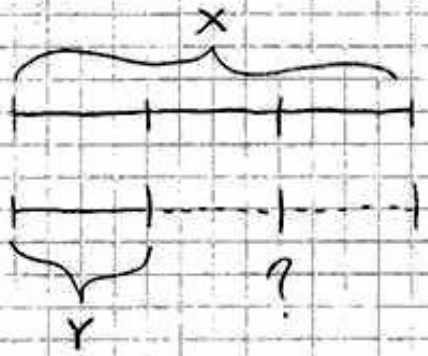
Esempio:
La rappresentazione segmentale, *trasposizioni* dai nostri problemi a parole ai problemi con variazione

Scuola Primaria “S. Bartolomeo”
Reggio Emilia

... quasi a margine

17 GENNAIO 2013

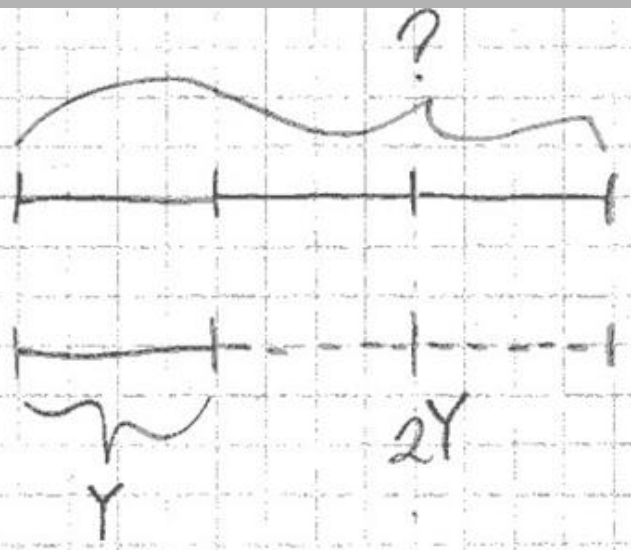
Dopo aver ripercorso i ragionamenti sui problemi e le loro rappresentazioni, prova ad inventare uno che corrisponda a questo:



Un pescherecciaio pesca un X di pesce e lo divide in 3 parti in cui una è un Y di pesce. Quanto pesce in due parti?

$Y \cdot 2 = Z$

... quasi a margine



Un pescherecciaio pesca del pesce. e lo divide in 3 parti dove uno è pari a Y di pesce e due è 2Y quanto pesce ha pescato?

$$Y + 2Y = X$$