



# WEBinASPHI

(per una didattica inclusiva)

*"Difficoltà in matematica e prevenzione del rischio discalculia"*



15  
Giugno  
Coordina  
Paola  
Angelucci



Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia  
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane

**"Problemi con variazione:  
dalla rappresentazione discreta  
a quella continua"**

Alessandro Ramploud, in collaborazione con  
Maria Mellone



Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia  
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane

# “Problemi con variazione: dalla rappresentazione discreta a quella continua”

Alessandro Ramploud

Advances in Mathematics Education

Jinfa Cai  
Eric Knuth *Editors*

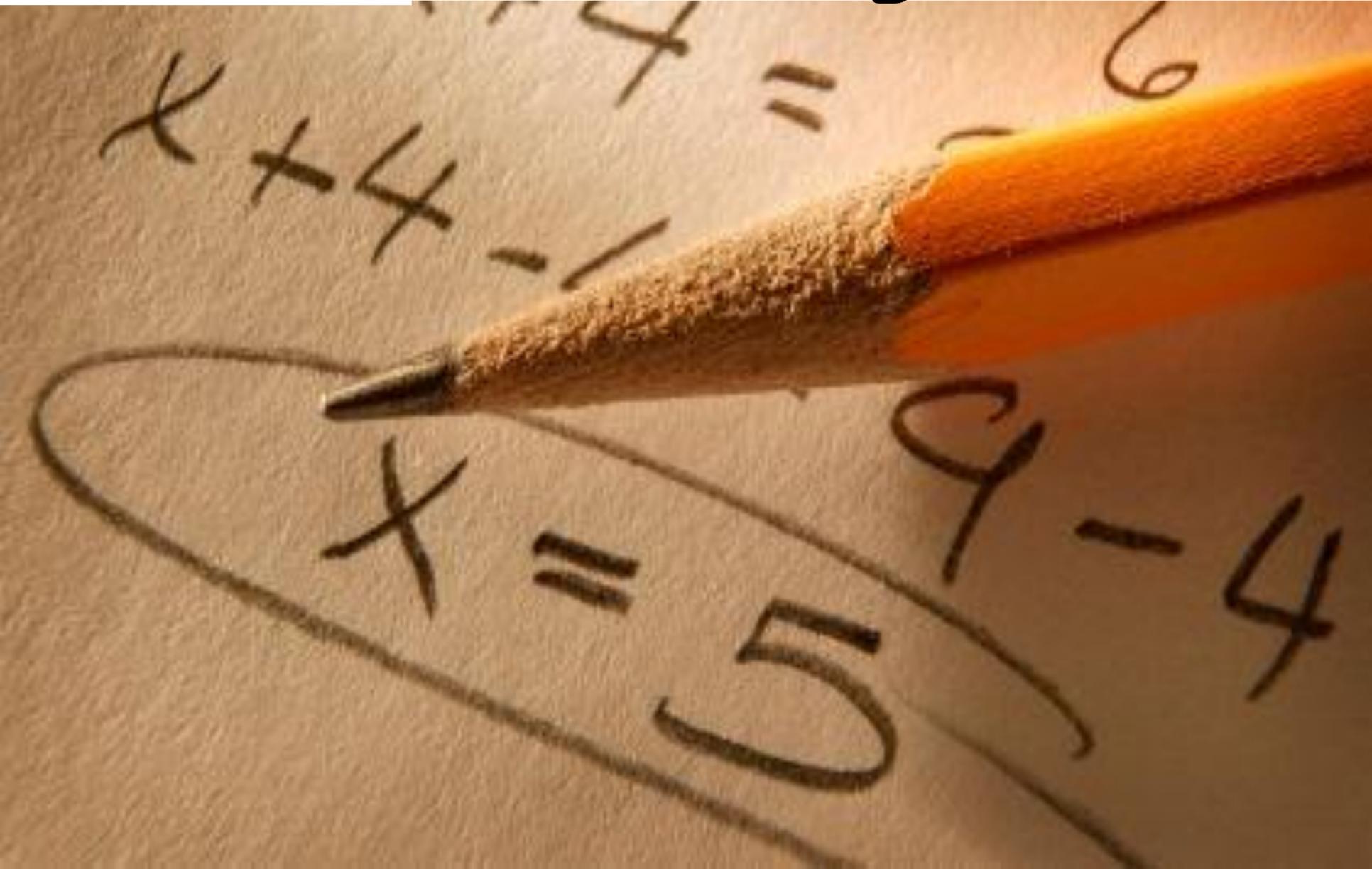
# Early Algebraization

A Global Dialogue  
from Multiple Perspectives

 Springer

*perché...*

**...l'algebra?**



# L'algebra nella scuola

Tradizionalmente,

la maggior parte dei programmi scolastici di matematica separano lo studio dell'aritmetica e lo studio dell'algebra.

l'**aritmetica** diviene l'obiettivo principale della matematica per la **scuola primaria**,

l'**algebra** diviene l'obiettivo principale della matematica per la **scuola secondaria**

# L'algebra nella scuola

C'è un crescente consenso, tuttavia, sul fatto che questa separazione renda più difficile, per gli studenti, comprendere l'algebra nei gradi scolastici superiori (Kieran, 2007)

Inoltre, sulla base di recenti ricerche sull'apprendimento, ci sono molte ragioni evidenti e ampiamente accettate per l'introduzione di idee algebriche già nei gradi scolastici inferiori (Cai and Knuth, 2005)

# ***Early Algebraization***

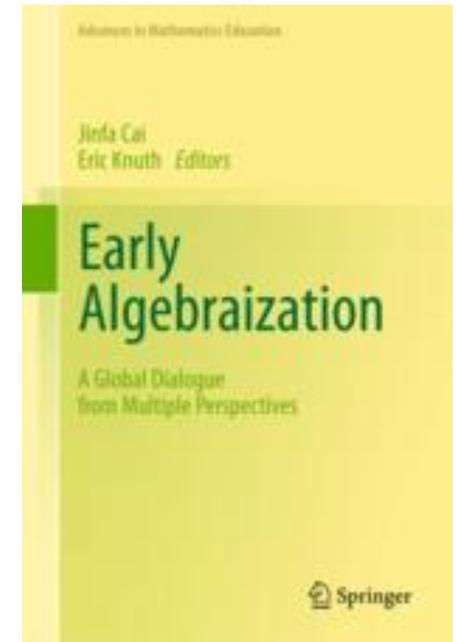
[Jinfa Cai, Eric Knuth]

*L'algebra è stata caratterizzata come la più importante "porta d'accesso" per la matematica*

*E 'ampiamente accettato che per raggiungere l'obiettivo dell' "algebra per tutti",*

*gli studenti della scuola primaria dovrebbero avere esperienze in grado di prepararli allo studio più formale dell'algebra nei gradi successivi*

*(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM])*



## Le domande:

**Se consideriamo corretto e da perseguire ciò che ci dicono J. Cai e E. Knuth, ossia, che...**

...Lo sviluppo di idee algebriche nei gradi scolastici inferiori (primaria) **richiede** fundamentalmente la *riforma di come dovrebbero essere intese ed insegnate l'aritmetica e l'algebra, nonché una migliore comprensione dei vari fattori che rendono il passaggio dall'aritmetica all'algebra difficile per **gli** studenti.*

# **Le domande**

**E' possibile, nel nostro contesto culturale, tentare di realizzare ciò?**

*trasposizione culturale*, intendendo con questo termine il processo di cambiamento che si sviluppa quando vi è un farsi incontro di pratiche didattiche di differenti culture, che consentono il ripensamento delle proprie (Ramploud, 2015 e Mellone & Ramploud, 2015). L'idea è che in questo modo la differenza tra contesti culturali viene utilizzata come risorsa, senza alcun tentativo di "traduzione" da una cultura all'altra, ma piuttosto con l'obiettivo di cercare di approfondire con attenzione i processi di significato connessi ai diversi contesti culturali, al fine di diventare più consapevoli di quelli propri.

# **Il focus di questo webinar**

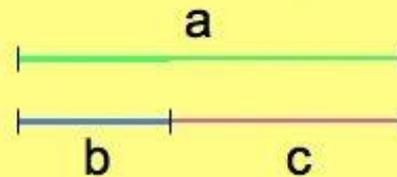
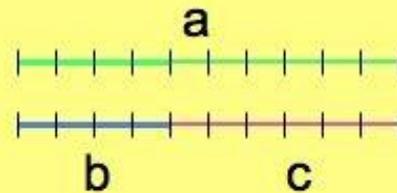
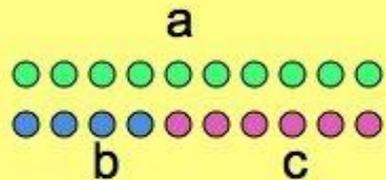
**In questa occasione ci occuperemo della  
presentazione e transizione dalla  
rappresentazione discreta a quella  
continua.**

# **Le domande**

**E' possibile introdurre questa tipologia di lavoro fino dalle prime classi della scuola primaria?**

**Se sì, come?**

# STRUTTURA ADDITIVA



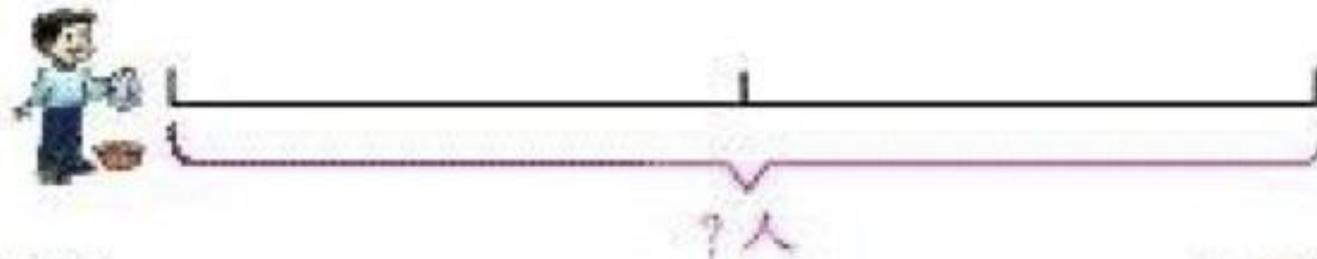
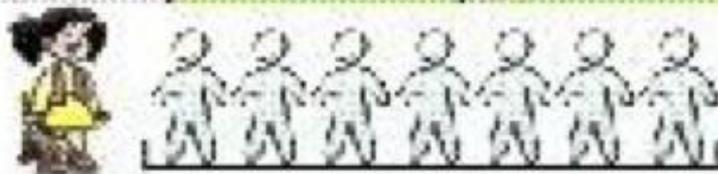
$$a = b + c$$

Discreto, continuo discretizzato, continuo (Paolo Guidoni)

vedi sperimentazioni di Olga Mautone e Lina Nazzaro

# Dal discreto al continuo nei libri cinesi

4



# Dal discreto al continuo nei libri cinesi

*Che cosa notiamo qui?*

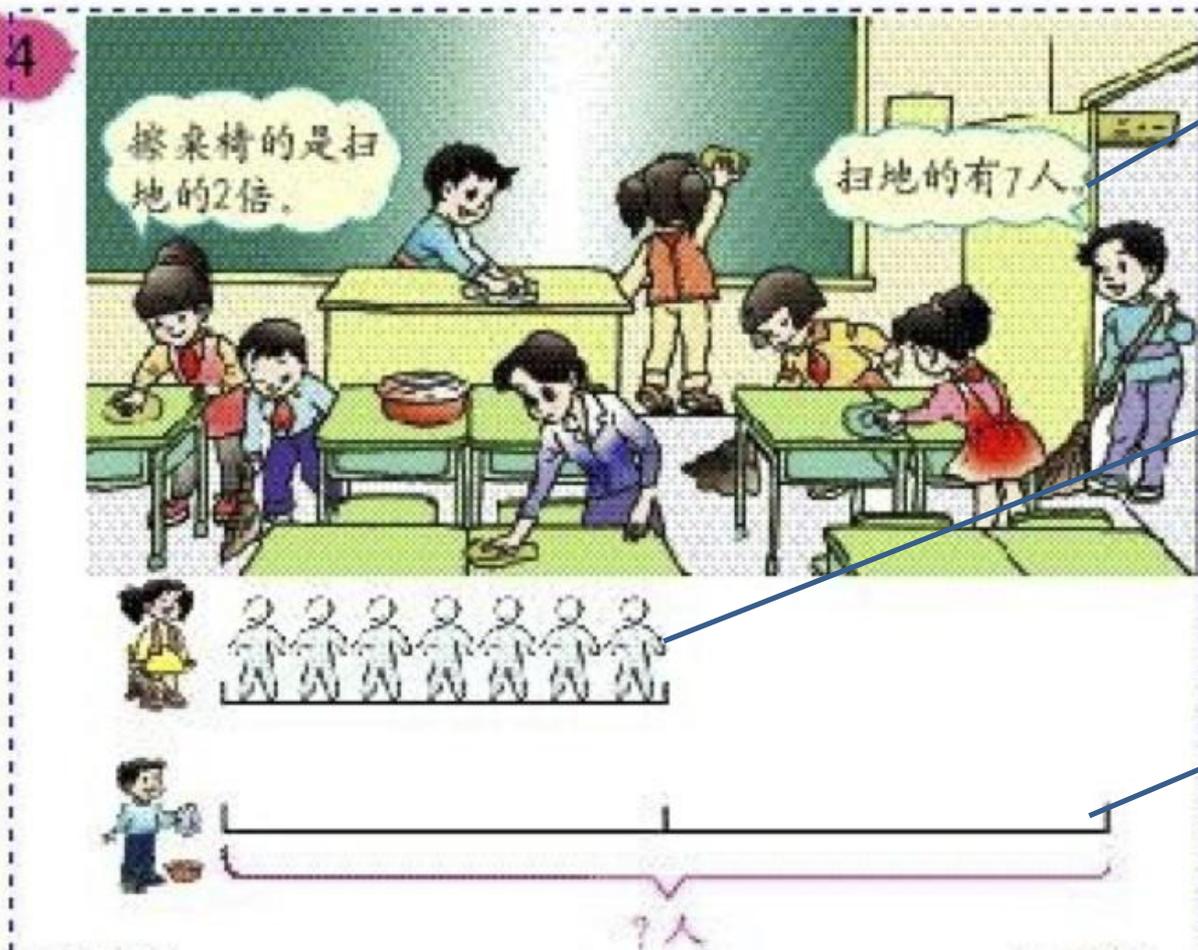


Immagine di situazione concreta

Rappresentazione discreta che avvia al continuo

Rappresentazione continua che rimanda al discreto

Istituto Comprensivo “Leonardo Da Vinci”  
Reggio Emilia

Scuola Primaria “Elsa Morante”

Classe II (insegnante unica ambito linguistico/ambito logico)

ins. Loretta Maffoni

ins. Carla Messori

Problemi con **Variazione:**

traduzioni, significati, soluzione di problemi

*Durata: tutto l'anno scolastico*

# La rappresentazione

la soluzione dei problemi con  
variazione attraverso la  
rappresentazione

# Rappresentazione

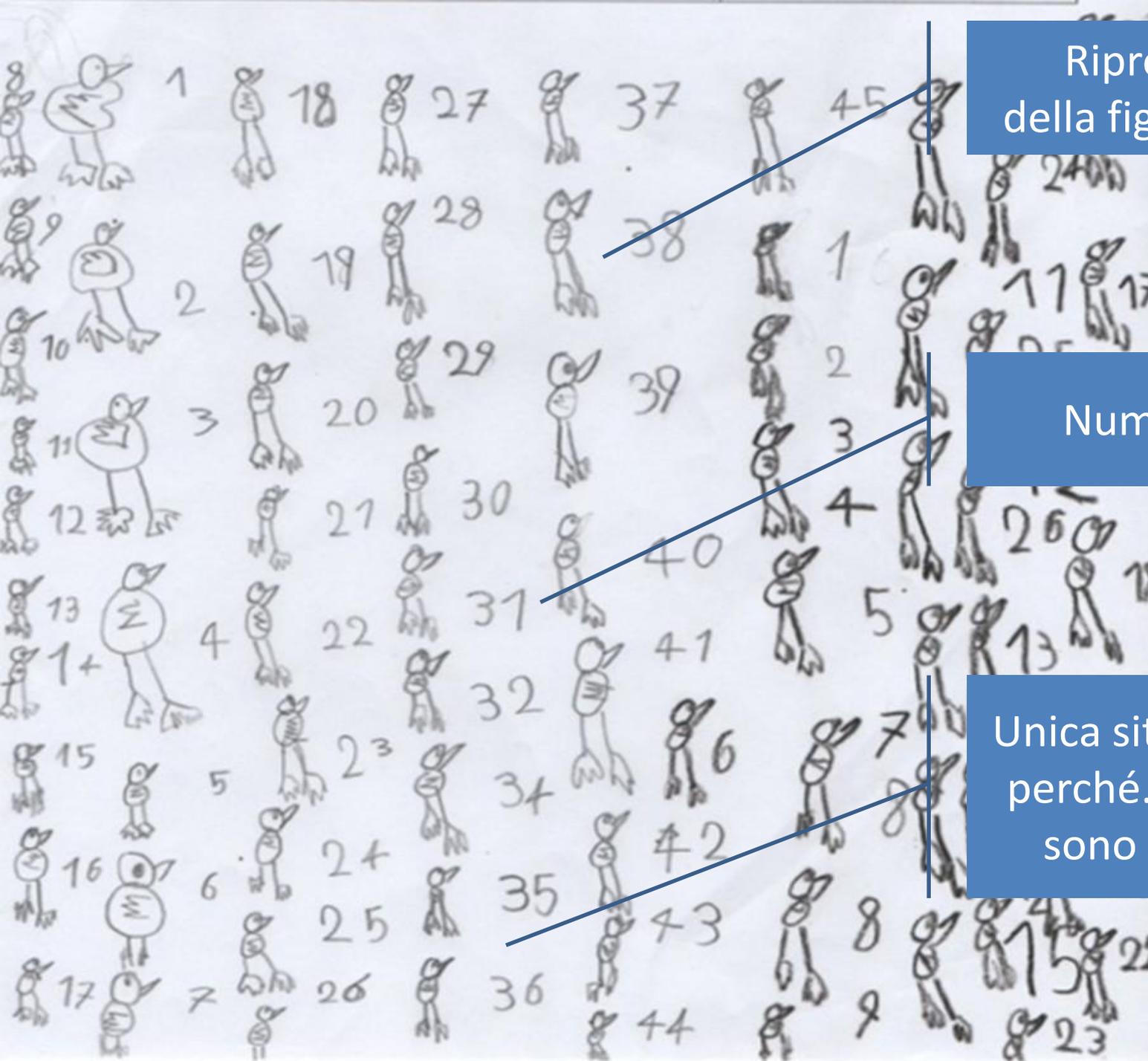
NEL FIUME CI SONO  
45 ANATRE BIANCHE E  
30 ANATRE NERE.  
QUANTE ANATRE CI  
SONO IN TOTALE?

NEL FIUME CI SONO  
IN TOTALE 75 ANATRE  
BIANCHE E NERE.  
TRA QUESTE 45  
ANATRE SONO  
BIANCHE.  
QUANTE ANATRE  
NERE CI SONO?

NEL FIUME CI SONO  
IN TOTALE 75 ANATRE  
BIANCHE E NERE.  
TRA QUESTE 30  
ANATRE SONO NERE.  
QUANTE ANATRE  
BIANCHE CI SONO?

Quale  
consegna?

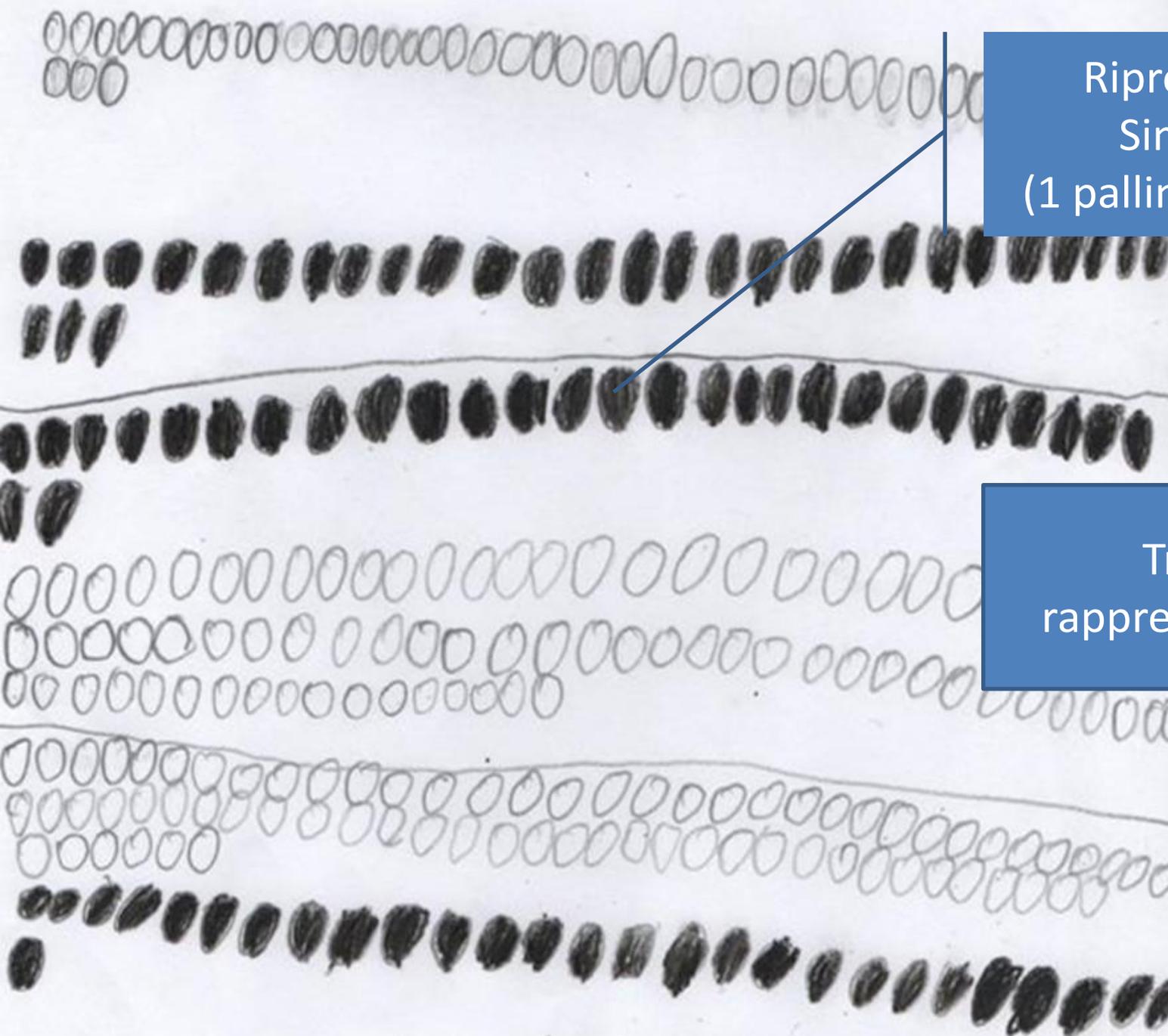
Come potremmo disegnare  
queste situazioni problematiche?



Riproduzione della figura (anatra)

Numerazione

Unica situazione, ma perché... «maestra, sono stanca!!!»

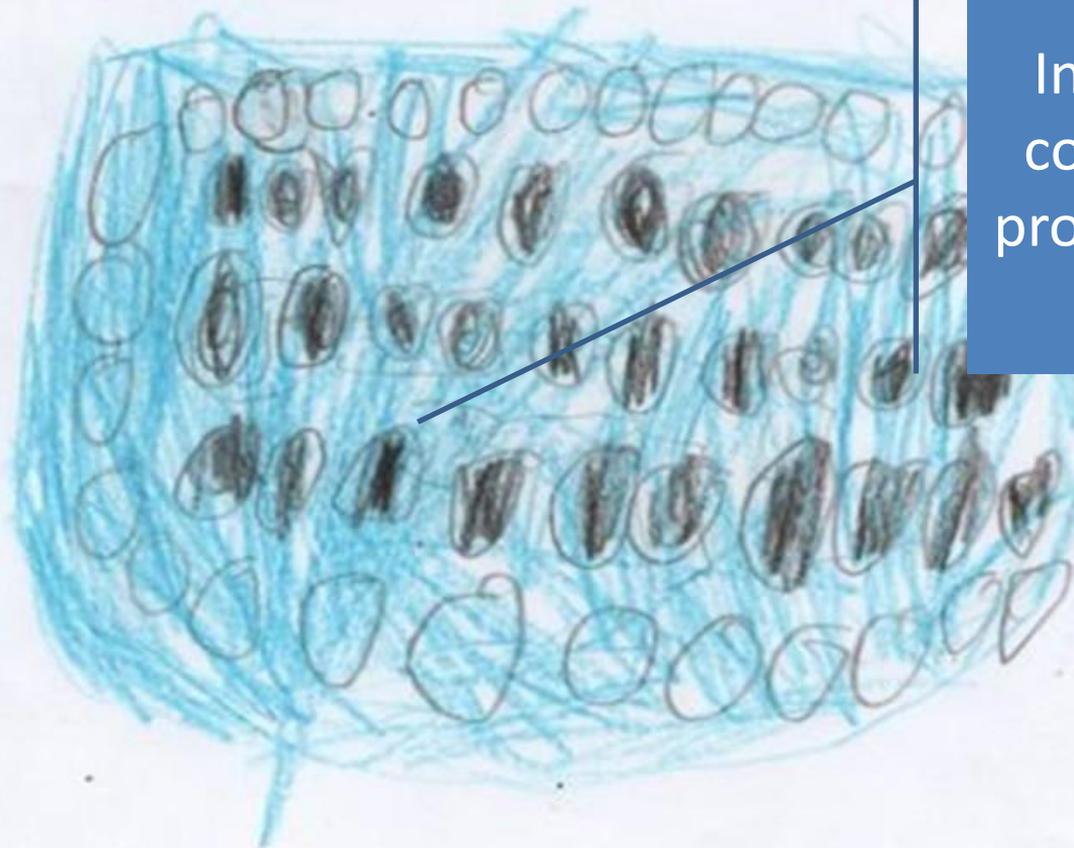


Riproduzione  
Simbolica  
(1 pallina=1 anatra)

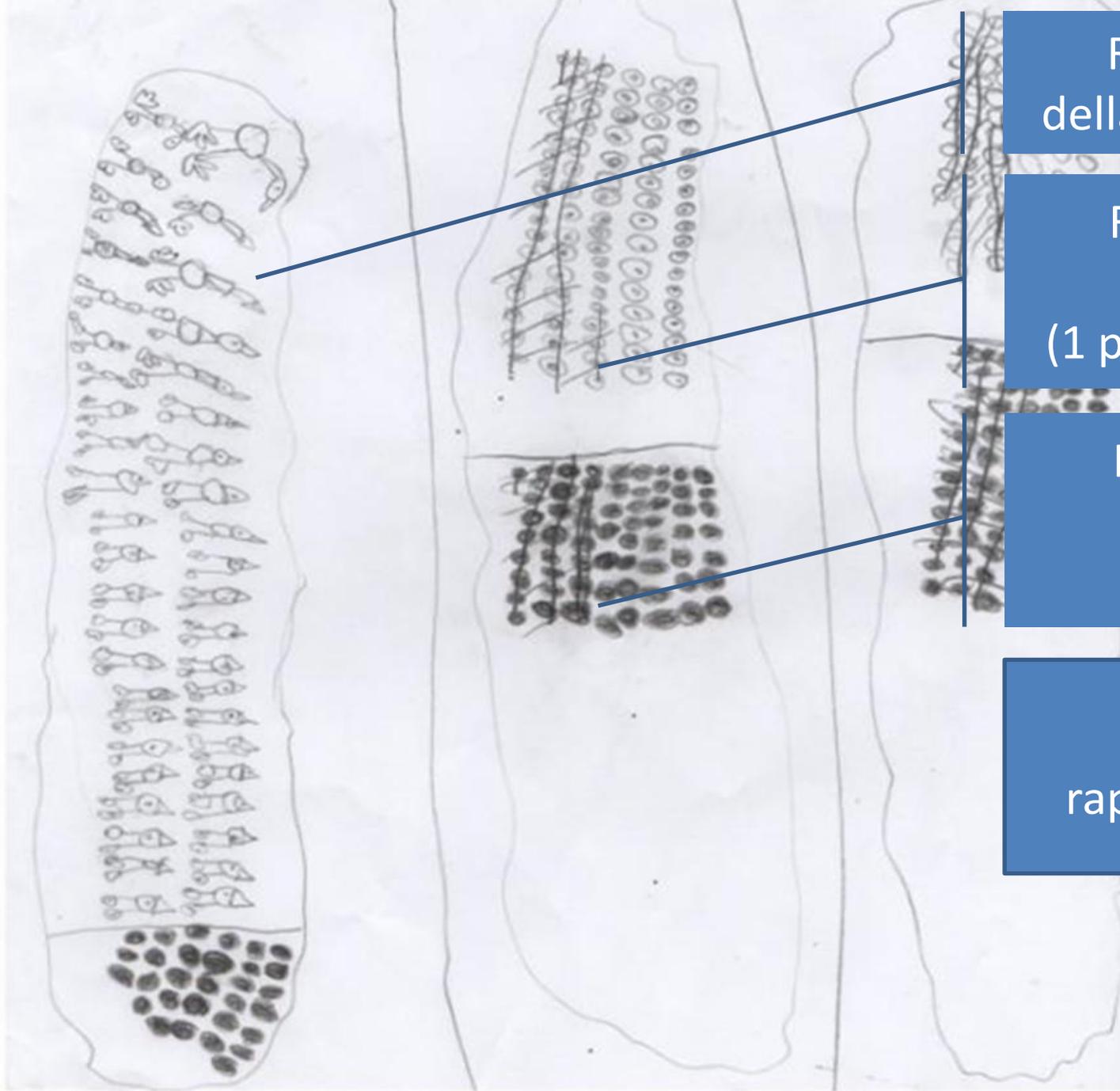
Triplice  
rappresentazione



Unica  
rappresentazione  
simbolica, anche se in  
due spazi



Individuazione del  
contesto che apre i  
problemi: «Nel fiume  
ci sono...»



Riproduzione della figura (anatra)

Riproduzione Simbolica (1 pallina=1 anatra)

Inciampo nel conteggio (sempre 75)

Triplice rappresentazione

DOPO AVER GUARDATO INSIEME TUTTI I  
NOSTRI DISEGNI, ABBIAMO CAPITO CHE:

1) C'È UN DISEGNO SOLO CHE RAPPRESENTA  
TUTTI I 3 PROBLEMI

2) IL DISEGNO PIÙ FACILE, CHIARO,  
ORDINATO E UTILE PER CAPIRE I PROBLEMI

È QUELLO CHE HA:

\* LE ANATRE RAPPRESENTATE CON LE PALLINE

\*

LE PALLINE DISEGNATE CON ORDINE IN  
IN GRUPPI DI 10

ECCOLO



CHIARA

# Rappresentazione e formalizzazione



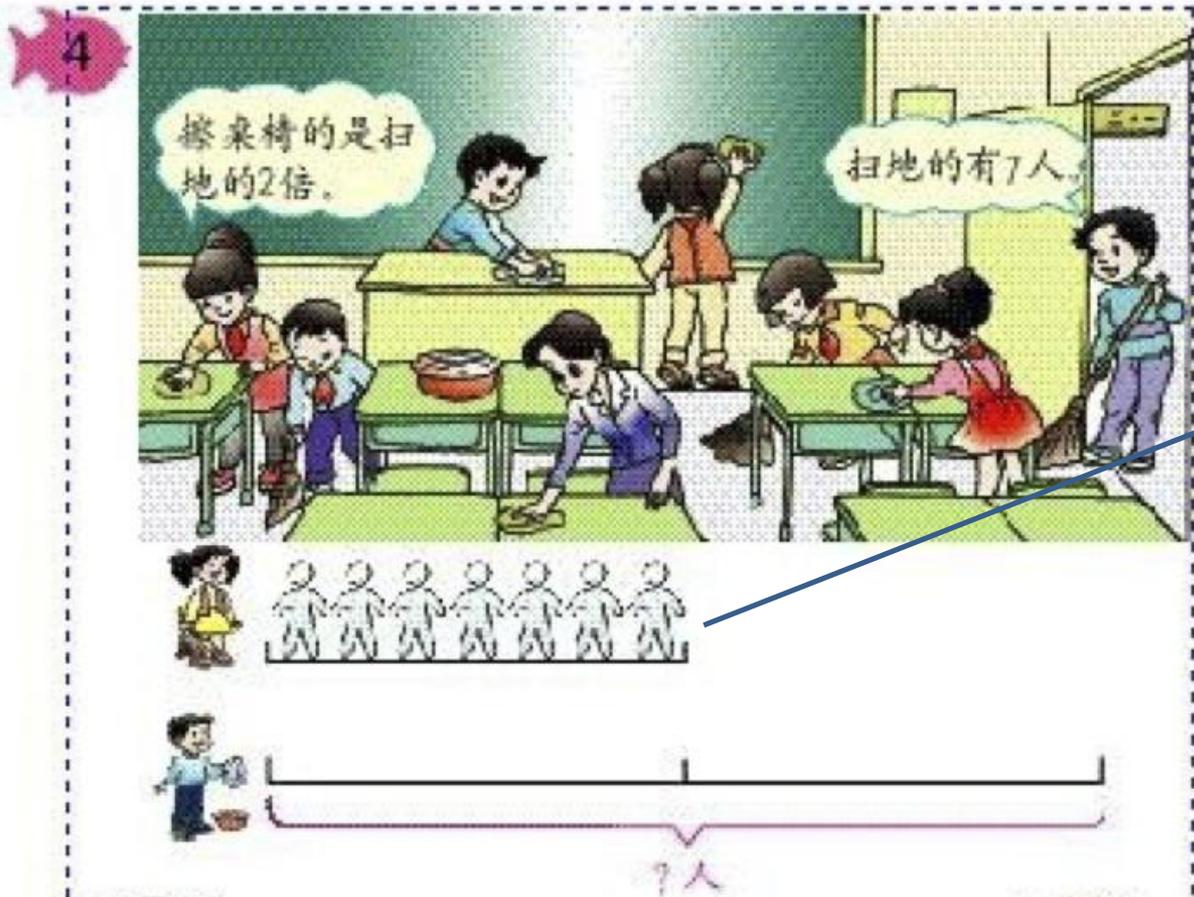
# Dal discreto al continuo...

Esempio di trasposizione culturale  
dai libri di testo cinesi

*Dai pesciolini... al modello a barre*

# Dal discreto al continuo nei libri cinesi

*Ritorniamo alla nostra immagine di partenza*



Rappresentazione discreta che avvia al continuo

# Dal discreto al continuo

*Come possiamo introdurre questo  
ulteriore passaggio?*

Proviamo a trasporre  
nell'attività didattica italiana

# Dal discreto al continuo

*Come possiamo introdurre questo ulteriore passaggio?*

Da un branco di pesci se ne allontanano 5.

Adesso il branco è composto da 7 pesci.

Di quanti pesci era formato il branco?

# Dal discreto al continuo

*Rappresentiamo la situazione problematica*

Da un branco di pesci se ne allontanano 3. Adesso il branco è composto da 4 pesci. Di quanti pesci era formato il branco?

3 si allontanano

Adesso ci sono  
4 pesci

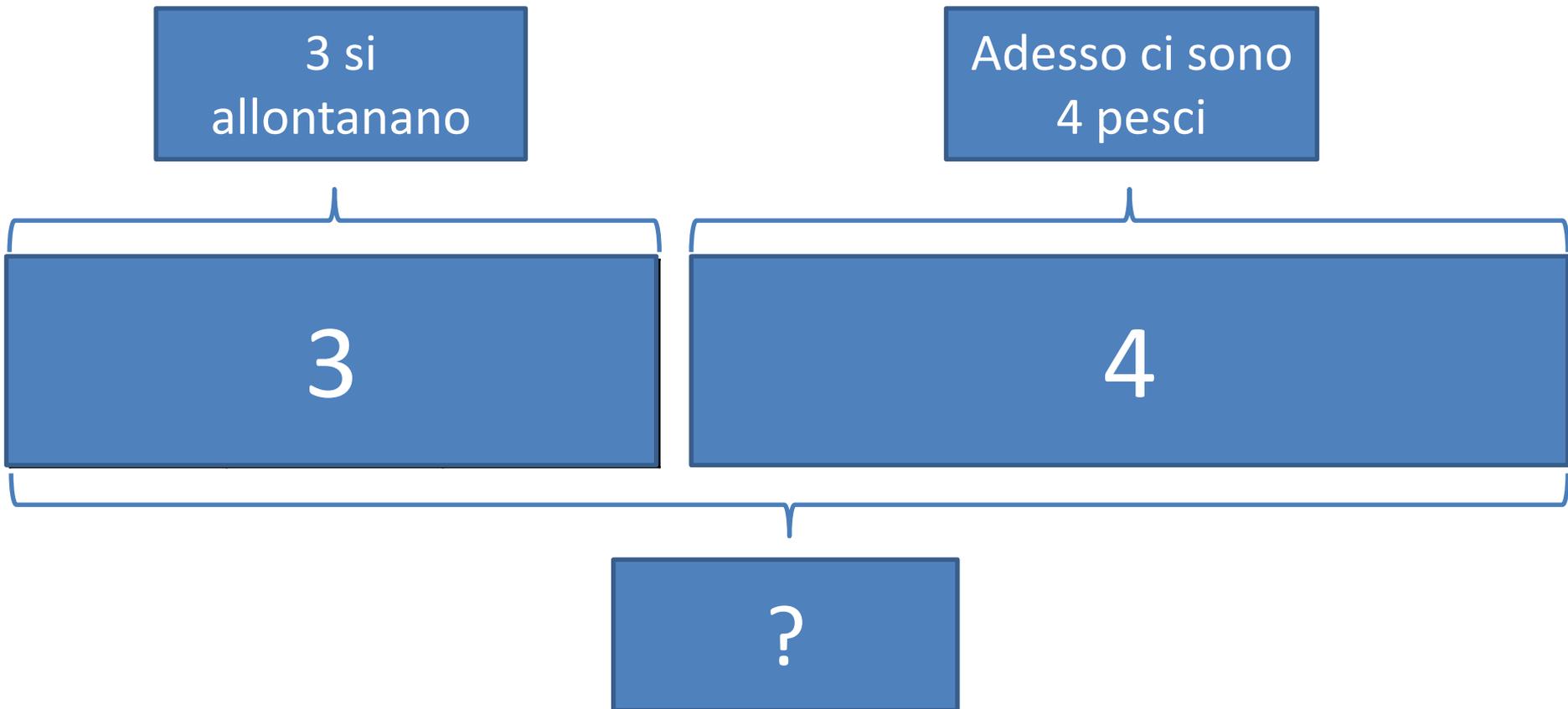


?

# Dal discreto al continuo

*Rappresentiamo la situazione problematica*

Da un branco di pesci se ne allontanano 3. Adesso il branco è composto da 4 pesci. Di quanti pesci era formato il branco?



# Dal discreto al continuo

*Rappresentiamo la situazione problematica*

Da un branco di pesci se ne allontanano 782. Adesso il branco è composto da 1782 pesci. Di quanti pesci era formato il branco?

782 si  
allontanano

Adesso ci sono  
1782 pesci

782

1782

?

Problema con variazione per immagini



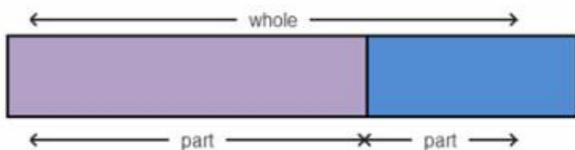
$\square + \square = \square$	$\square - \square = \square$	$\square - \square = \square$
$\square + \square = \square$		

Scrivi tutte le situazioni problematiche che possono essere rappresentate da questa immagine e risolvi con le relative operazioni.

# Problemi con variazione per immagine

*Che cosa stiamo favorendo e preparando?*

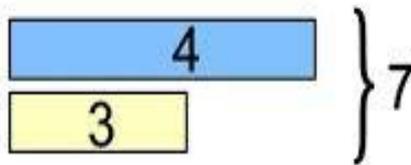
## Part-Whole Model Addition & Subtraction



Part + Part = Whole

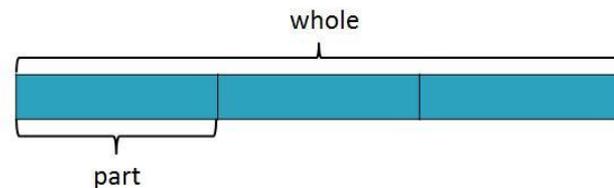
Whole - Part = Part

## Draw Models



© www.basic-math-explained.com

## Part- Whole Model (Multiplication and Division)



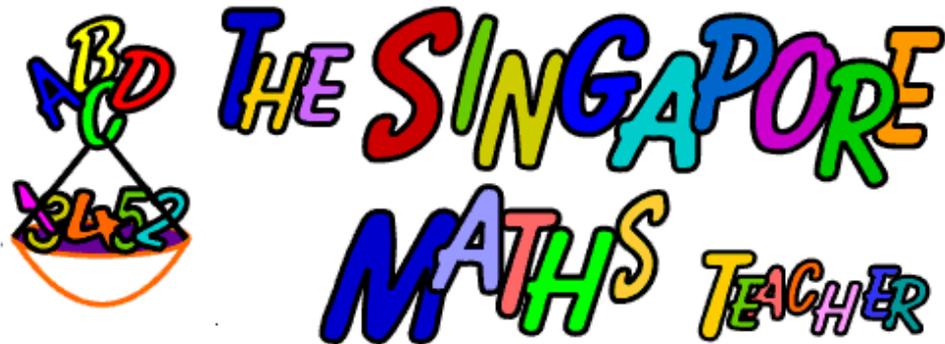
one part x number of parts = whole

whole ÷ number of parts = one part

whole ÷ one part = number of parts

# Dal discreto al continuo

*Trasposizione culturale  
didattica della matematica a Singapore*



---

**OUR OBJECTIVE**

**INSTRUCTIONS**

**CONTACT US**

---

<http://www.thesingaporemaths.com/index.html>

# Singapore Mathematics

## MODEL-DRAWING

to solve problems

Primary 3

Level 1.1

Home



Finding an unknown number. Study the following example.

Question 1a: Find the unknown number in the box

$$\boxed{?} - 7 = 5$$

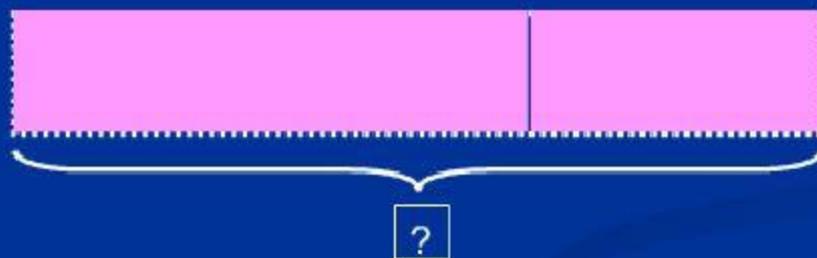
Home



Finding an unknown number. Study the following example.

Question 1a: Find the unknown number in the box

$$\boxed{?} - 7 = 5$$

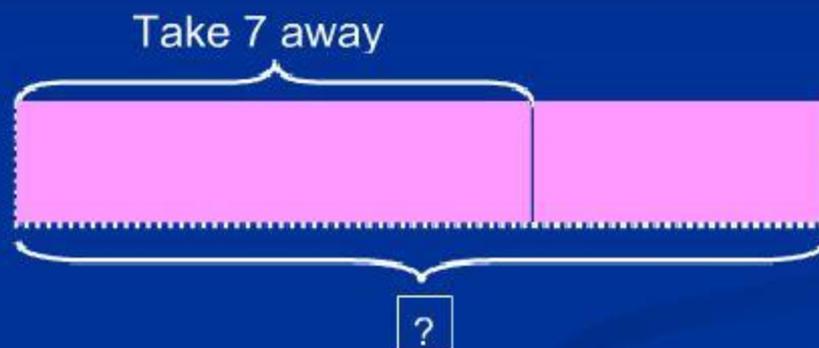


Home

Finding an unknown number. Study the following example.

Question 1a: Find the unknown number in the box

$$\boxed{?} - 7 = 5$$

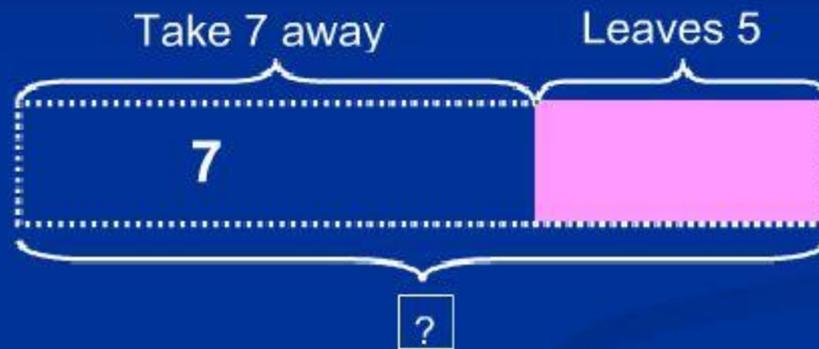


Home

Finding an unknown number. Study the following example.

Question 1a: Find the unknown number in the box

$$\boxed{?} - 7 = 5$$

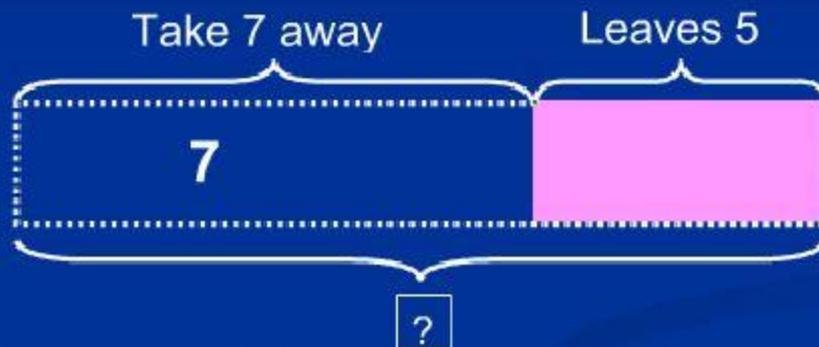


Home

Finding an unknown number. Study the following example.

Question 1a: Find the unknown number in the box

$$\boxed{?} - 7 = 5$$



From the above model you can see that the unknown number in the box is equal to  $7 + 5$ , which is **12**.

( Double-check :  $\boxed{12} - 7 = 5$  )

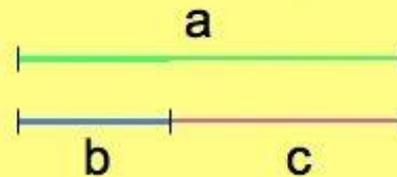
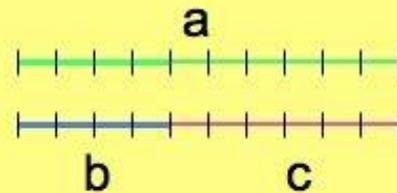
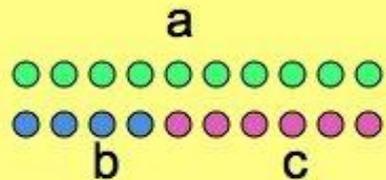
Home

Maria Mellone  
Università degli Studi di Napoli

# Dal discreto al continuo...

Esempio di trasposizione culturale  
Dalla didattica della matematica russa  
*Il caso dei bicchieri d'acqua*

# STRUTTURA ADDITIVA



$$a = b + c$$

Discreto, continuo discretizzato, continuo (Paolo Guidoni)

vedi sperimentazioni di Olga Mautone e Lina Nazzaro

# Adattamento italiano dell'approccio di Davydov (trasposizione didattica)

Un percorso di riscoperta dei  
significati aritmetici e algebrici  
attraverso il lavoro con le quantità

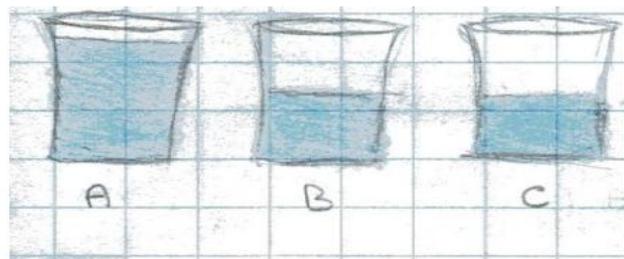
Mellone, Punzo, Tortora (2012)

Il percorso, adattato per una V° elementare, può essere suddiviso in tre fasi:

- Osservazione, descrizione e rappresentazione soprattutto grafica di semplici uguaglianze e disequaglianze tra quantità.
- Riflessione collettiva sull'utilizzo di rappresentazioni visuo-spaziali per focalizzare l'attenzione sugli aspetti strutturali delle operazioni compiute (questo rappresenta un punto di innovazione rispetto ai percorsi proposti da Davydov e dal nostro punto di vista un momento cruciale di stabilizzazione e presa di consapevolezza delle conoscenze costruite).
- Individuazione e riconoscimento della struttura in situazioni problematiche diverse e utilizzo della stessa per la risoluzione delle equazioni. Questa fase è intesa sia come parte integrante dell'attività di sviluppo del pensiero algebrico, sia come momento di verifica, che ci ha consentito di rintracciare nei ragionamenti dei bambini gli effetti del percorso precedente.

## I fase

L'insegnante dispone sulla cattedra tre contenitori uguali che contengono diversi volumi d'acqua e propone agli alunni di osservare e descrivere le eventuali eguaglianze e disequaglianze esistenti.



A	>	B
A	>	C
B	=	C
C	<	A
B	<	A

Flora: *Maestra, sappiamo solo che quei due sono riempiti con lo stesso livello e la stessa quantità d'acqua [indica B e C], mentre il primo ha più quantità d'acqua.*

Giuseppe: *Ne so un'altra io, A più B più C meno B e C è uguale ad A. [Giuseppe va alla lavagna e scrive "A + B + C – B + C = A"]. Se noi mettiamo insieme A, B e C esce una quantità d'acqua, poi se faccio meno B e C mi esce A di nuovo .*

**Voci di dissenso.**

Giuseppe: *Io intendevo dire con "più" che B e C vanno tolte insieme.*

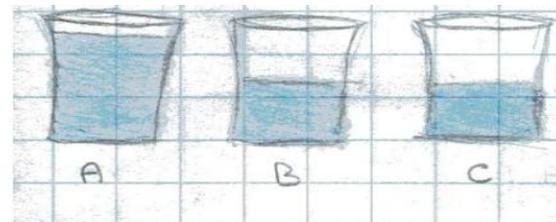
Maestra: *Ma alla lavagna, è scritto proprio quello che hai detto in italiano: "A più B più C meno B e C, è uguale a C"? Che cosa devi scrivere per far capire quello che intendi dire?*

Giuseppe: *Ah, maestra, devo mettere le parentesi [corregge alla lavagna scrivendo "A + B + C – (B + C) = A"].*

Claudia: *In effetti, lui ha addizionato tutto e poi ne ha tolti due, però si potevano togliere anche due diversi e ne veniva un'altra. Ad esempio, se al posto di B e C toglieva A e B, usciva C*

[Claudia, invitata dalla maestra, scrive la sua uguaglianza alla lavagna:

$$\text{"A + B + C – ( A + B ) = C"}$$

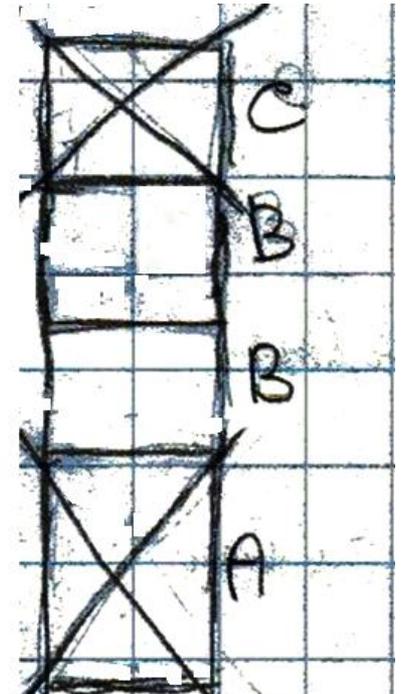
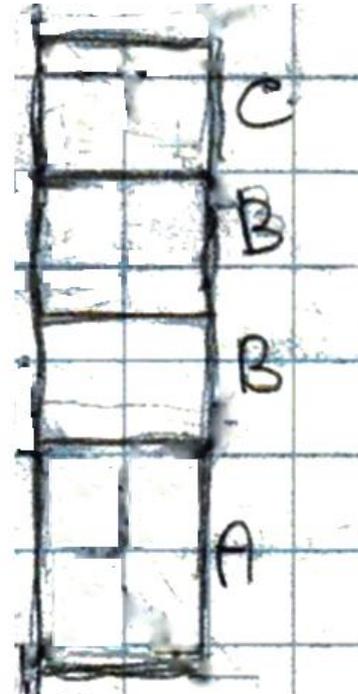
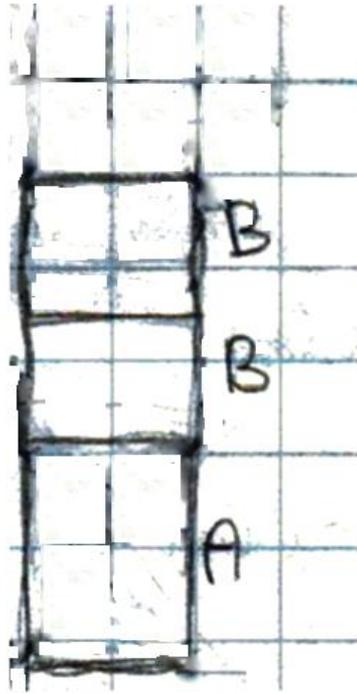


I fase

... alla ricerca di uguaglianze

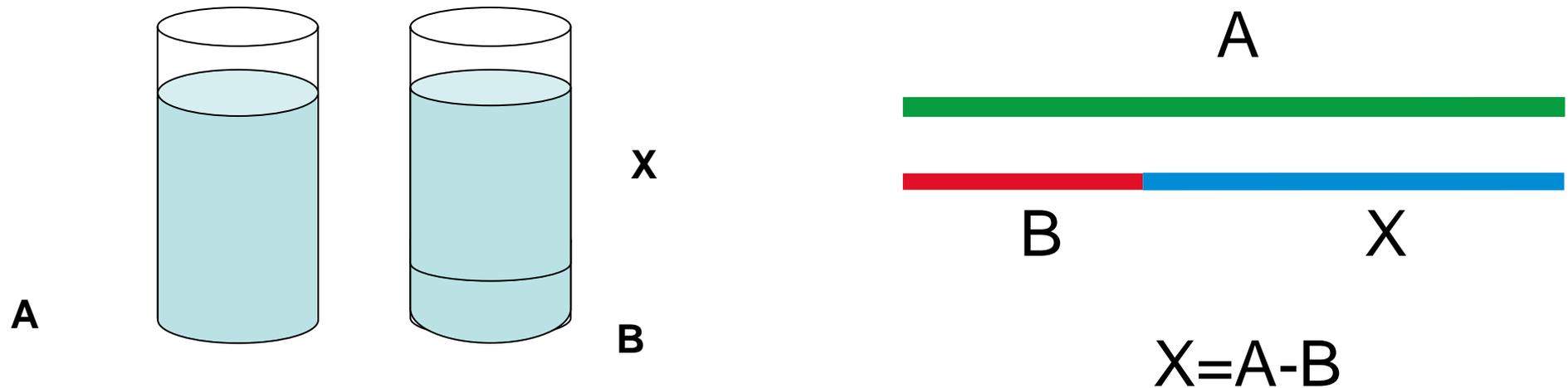
$$A+B+B+C-(A+C)=B \times 2 \text{ o } C \times 2$$

Flora: *Maestra, ne ho trovata un'altra. Se noi addizioniamo due B, o due C è lo stesso, e poi addizioniamo un'altra C e poi togliamo via A e C, esce due B o due C. Posso scriverla alla lavagna?*



# Confronto e misura di quantità continue

Davydov, 1982



$$A > B$$

$$A = B + X$$

$$X = A - B$$

struttura "algebraica" prima  
dell'Aritmetica

# Relazioni tra quantità

- La tendenza a riconoscere strutture si sviluppa in questi contesti indipendentemente dai numeri;
- In questo tipo di attività si può raggiungere la generalità della relazione senza passare attraverso i diversi passaggi di generalizzazione;
- Le attività di esplorazione portano naturalmente ad usare rappresentazioni visuospaziali che sono strumenti utili per vedere la struttura e spostarsi verso forme simboliche più formali (Davydov, 1982).

# Esplorazioni aritmetiche Mellone (2011)

Le attività di esplorazione nel dominio dei numeri naturali possono promuovere l'attenzione alla struttura nei bambini piccoli.

Noi ipotizziamo che l'ottenere dei risultati attraverso la ricerca di trucchi per Induce un passaggio da un primo comportamento (semplice esecuzione di operazioni concrete), verso un atteggiamento algebrico basato sull'attenzione alla struttura.

**Visione strutturale  
delle procedure**

# Il caso di Ivan

Prendi tre numeri consecutivi e addizionali. Ripetilo più volte usando gruppi di tre numeri consecutivi. Cosa osservi?

Ivan: *“Ho capito! Basta fare ottantaquattro per tre”*

L'insegnante invita Ivan a spiegare la sua scoperta, anche perchè non tutta la classe sta lavorando su quella particolare terna.

Ivan: *“Se noi togliamo un'unità dall'ottantacinque e la diamo all'ottantatre allora diventano tre ottantaquattro, e quindi se facciamo ottantaquattro per tre facciamo prima”*.

L'insegnante invita Ivan ad usare degli oggetti come i regoli o a fare un disegno per spiegare meglio il suo pensiero



## CON I REGOLI



$$\text{red block} + \text{red block} + \text{red block} = \text{teal bar}$$

Se togliamo una unità all'ultima cifra e la diamo alla prima otteniamo 3 numeri uguali

$$75 = 7 \times 10 + 5$$

Se è vero che ogni volta che ho un'addizione ho anche una sottrazione, è anche vero che ogni volta che ho un numero scritto nel sistema posizionale decimale ho addizioni e moltiplicazioni (e quindi sottrazioni e divisioni)

# Dal discreto al continuo...

Esempio di utilizzo  
dell'*equazione figurale* o del *bar model*  
per la soluzione di problemi INVALSI  
*Il caso di Gigi, sollevatore di pesi*

# Prove INVALSI 2° primaria anno scolastico 2015-2016

D19. Gigi si allena al sollevamento pesi.



**Il peso totale dei due cilindri a sinistra è uguale al peso totale dei due cilindri a destra.**

**Su uno dei cilindri manca il peso in chili.**

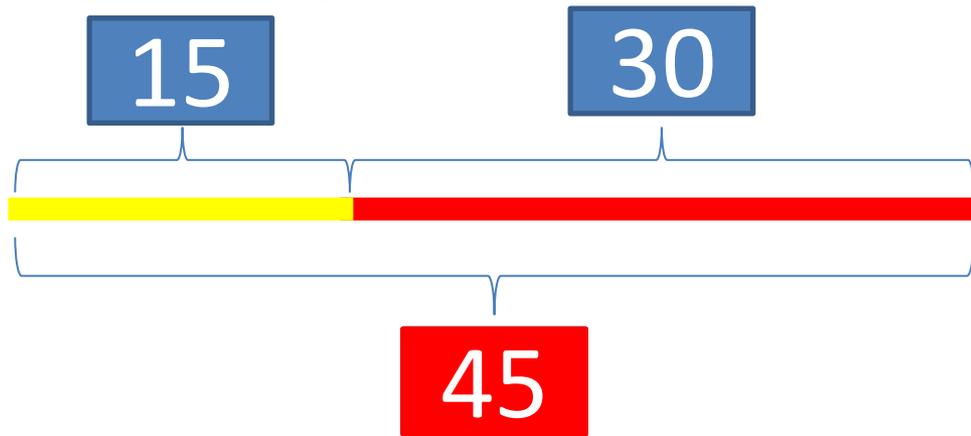
**Qual è questo peso?**

- A.  45 chili
- B.  30 chili
- C.  25 chili

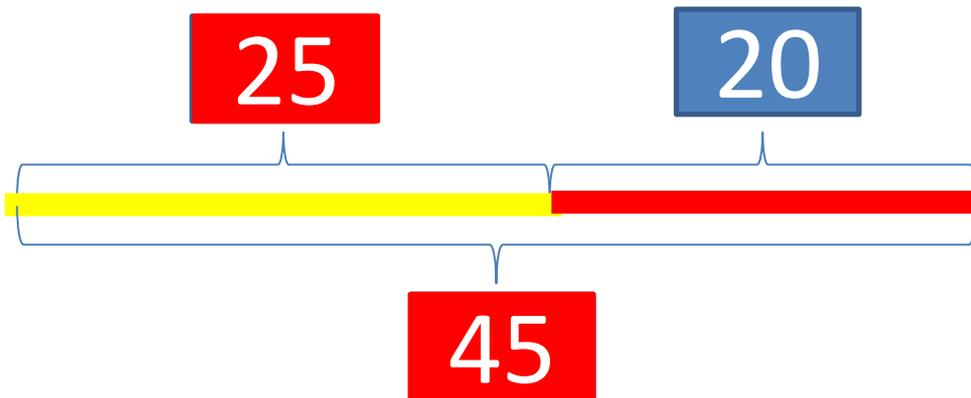
Il peso totale dei due cilindri a sinistra è uguale al peso totale dei due cilindri a destra.

Su uno dei cilindri manca il peso in chili.

Qual è questo peso?



$$15 + 30 = 45$$



$$45 - 20 = 25$$



# WEBinASPHI

*(per una didattica inclusiva)*

*"Difficoltà in matematica e prevenzione del rischio discalculia"*



15  
Giugno  
Coordina  
Paola  
Angelucci



Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia  
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane

**“Problemi con variazione:  
dalla rappresentazione discreta  
a quella continua”**  
Alessandro Ramploud